# 2.2 矩阵乘法

本节讲解矩阵乘法。我们将在第3章中看到，矩阵乘法用于实现点和向量的变换，并通过矩阵乘法将一系列的变换组合在一起。

## 2.2.1 定义

假设**A**是一个*m*×*n*矩阵，**B**是一个*n*×*p*矩阵，乘积**AB**由**C**表示，则**C**是一个*m*×*p*矩阵，其中结果**C**的第*ij*个元素的值等于**A**的第*i*个行向量和**B**的第*j*个列向量的点积，也就是，

**C***ij*=**A***i*,\* ∙**B**\*,*j* （2.1）

注意，矩阵**A**的列数必须与矩阵**B**的行数相同，只有这样才能计算矩阵乘积**C**，也就是说，**A**中的行向量的维数必须与**B**中的列向量的维数相同。如果维数不同，那么公式2.1中的点积就没有意义。

### 例2.3

设



则，无法计算乘积**AB**，因为**A**中的行向量的维数是2，而**B**中的列向量的维数是3。我们无法计算**A**的第1个行向量与**B**的第1个列向量的点积，因为一个2D向量是无法与一个3D向量计算点积的。

### 例 2.4

设



首先我们要指出的是可以计算乘积AB（是一个2×3矩阵），因为A的列数与B的行数相等。运用公式2.1可得：



注意，在个例子中我们无法计算**BA**的乘积，因为**B**的列数与**A**的行数不相等。这说明矩阵乘法通常不满足交换律；也就是**AB**≠**BA**。

## 2.2.2 向量-矩阵乘法

考虑下面的向量-矩阵乘法：



注意，这里**uA**的计算结果是一个1×3行向量。运用公式2.1可得：



因此，

（2.2）

公式2.2是一个常用的线性组合，它说明向量-矩阵的乘积**uA**等于向量**u**给出的标量系数*x*、*y*、*z*与矩阵**A**的每个行向量的线性组合。注意，虽然我们这里给出的例子是一个1×3行向量和一个3×3矩阵，但是这个计算方法是通用的。也就是，对于一个1×*n*行向量**u**和一个*n*×*m*矩阵**A**，乘积**uA**等于**u**给出的标量系数与**A**中的每个行向量的线性组合：

（2.3）

## 2.2.3 结合律

矩阵乘法具有一些有用的代数特性。例如，可以将矩阵乘法分配给每个加法分量：**A**(**B**+**C**)=**AB**+**AC**、(**A**+**B**)**C**=**AC**+**BC**。有时我们会使用矩阵乘法的结合律来改变相乘矩阵的计算顺序：

(**AB**)**C**=**A**(**BC**)