# 56．等量同种点电荷的电场，电场线分布情况如何？

等量同种点电荷的电场，其电场线图需要讨论的问题是，这两个点电荷的连线以及它们的中垂线画不画电场线？不管画不画，这两条线上各处是有电场的，即各点电场强度都有确定的值，但有两个特殊点：一是两点电荷连线的中点，该处的电场强度为零；另一处则在这两点电荷连线的垂直平分线上，从中心点开始向外，场强由零逐渐增大，而后再逐渐变小，因此会存在某一位置场强处于最大值，最大值的位置在何处，这是本文重点讨论的问题。

两个带等量正电的点电荷形成的电场，其电场线如图 1 所示，其中中间的四条线最为引人关注，两条线段分别从两点电荷出发相向而行，直至二者的中点处，另外两条射线则是从二者的中点处出发伸向无穷远处。两点电荷连线的中点处的场强等于零。

图 1 等量正点电荷电场的电场线

## 一、对两等量同号点电荷的电场线的一些误解和疑惑

很多中学物理教师是这样理解，并给学生讲解的：电场线的疏密反映了场强的大小，最靠近中垂线的两条电场线先逐渐靠近中垂线，至某处相距最近，而后又逐渐远离中垂线，而**最靠近中垂线的位置就是中垂线上场强极大值处**。

这其实是一种误解，下面我们通过数学推导加以说明：

（1）如图 2 所示，*x* 轴上相距原点 *O* 都等于 *l*/2的 C、D 两点处各有一个点电荷，电量都是 + *Q*，在 C、D 连线的垂直平分线（即 *y* 轴）上有一点 P，距离原点 *O* 为 *r*，根据电场的叠加原理，合场强大小 *E*(*r*) = 2*kQ* ，*E* 随 *r* 的取值不同有不同值，将 *E*(*r*) 对 *r* 求导并使其等于零，可得出 *r* = *l* 处存在着极大值 *E*max = 。

*y*

*x*

*O*

+*Q*

+*Q*

*r*

*E*1

*E*

*E*2

*l*/2

*l*/2

*θ*

*θ*

P

D

C

图 2 中垂线上一点的场强

上面的推导也可以把变量 *r* 换成 *θ*，即

*E*(*θ*) = 8*kQ*·= (1 – sin2*θ*)sin*θ*

将 *E*(*θ*) 对 *θ* 求导并使其等于 0，可得出 sin*θ* = 时，即 *r* = *l* 处存在着极大值 *E*max = ，与上面所得的结果相同。

结论是：在两等量同号点电荷电场的垂直平分线上，*r* 由 0 至 ± *l* （下面我们把 *r* = *l* 的点标注为 A 点），场强 *E* 值从 0 逐渐增大到上述极大值，随后，*r* 值从 A 点增大直至趋于无穷远，相应的 *E* 值由极大值逐渐减小最后趋于 0。

（2）如图 3 所示，在 *y* 轴左侧很近的位置任取一点 P，它的纵坐标为 *y*，PC 与 *x* 轴夹角为 *θ*1，则 C 点电荷的电场在 P 点的场强大小 *E*1 = *kQ* ，将其正交分解，其 *x* 轴分量

*E*1*x* = *kQ* = (1 – cos2*θ*1)cos*θ*1

*y*

*x*

*O*

+*Q*

+*Q*

*E*1

*E*2

*θ*1

*θ*2

P

D

C

图 3 中垂线左侧一点的场强

*E*2*y*

*E*2*x*

*E*1*y*

*E*1*x*

同样，连接 PD，设其与 – *x* 方向的夹角为 *θ*2（*θ*2 < *θ*1），则 D 点电荷的电场在 P 点的场强大小 *E*2 = *kQ* ，将其正交分解，其 *x* 轴分量

*E*2*x* = *kQ* = (1 – cos2*θ*2)cos*θ*2

其合场强的 *x* 分量 *Ex* = *E*1*x* – *E*2*x* = [(1 – cos2*θ*1)cos*θ*1 − (1 – cos2*θ*2)cos*θ*2]，若 *E*x > 0，则合场强的 *x* 轴分量向右，通过该点的电场线将逐渐靠近 *y* 轴；若 *Ex* < 0，则合场强的 *x* 轴分量向左，通过该点的电场线将远离 *y* 轴。我们主要关心的是 *Ex* 的正负，其中 *y* 虽然也是变量，但它总是正的，因此 *Ex* 的正负只决定于上面式子中括号内的部分，由于总有 *θ*1 大于 *θ*2，因此 *Ex* 的正负决定于函数 *f*(*θ*) = (1 – cos2*θ*)cos*θ* 的性质，若 *f*(*θ*) 是单调的增函数，则 *E*x > 0；若 *f*(*θ*) 是单调的减函数，则 *E*x < 0。

图 4 所示是 *f*(*θ*) 随 *θ* 变化的图像，不难看出，*f*(*θ*) 不是单调的函数，从 *θ* = 0 开始的阶段，*f*(*θ*) 随 *θ* 的增加而增加，至 *θ* 为某个数值时，*f*(*θ*) 达到最大值，而后 *f*(*θ*) 随 *θ* 的增加而减小。*f*(*θ*) 达到最大值的位置，正是两边的电场线最靠近 *yOz* 平面处，或说是两边的电场线相距最近处。下面就求这个位置：对 *f*(*θ*) 求导并令其等于 0，即得

− sin*θ* + 3cos2*θ*·sin*θ* = 0

0.5

1

1.5

0.1

0.2

0.3

0.4

*O*

*θ*

*f* (*θ*)

图 4 *f*(*θ*) 随 *θ* 变化的图像

得出当 cos*θ* = （即 *θ* = 54.7°，0.954 弧度）时，*f*(*θ*) 达到最大值 （约 0.385），这时两边的电场线最靠近 *y* 轴，如图 5 所示，我们把 *y* 轴上的该点标注为 B 点，B 点在 *y* 轴上的坐标为 *r* = *l*。

*y*

*x*

*O*

+*Q*

+*Q*

B（*r* = *l*）

D

C

图 5 A、B 两点位置

A（*r* = *l*）

从图中不难看出，*y* 轴上场强最大的位置是 A 点，而两边的电场线相距最近处则是 B 点。显然，“两边电场线**最靠近中垂线的位置就是中垂线上场强极大值处**”的说法是不正确的。

这是否说明“电场线的疏密反映电场的强弱”的说法也不正确呢？那么，又该如何解释上面出现的“佯谬”呢？

## 二、电场线本应是空间分布的

问题出在实际的电场线是在**空间分布**的，而我们画出的电场线图都是平面上的电场线分布图，它不能真正反映电场线的空间分布情况。

我们把前面的图 1 加上坐标轴，并把 A 点和 B 点标在上面，如图 6 所示，它表示的是两个带等量正电的点电荷的电场在 *xOy* 平面上的电场线分布情况，而在 *yOz* 平面内的电场线分布则如图 7 所示。（初看起来它很像孤立点电荷电场的电场线图，但孤立点电荷的电场线是空间对称分布的，而这里反映的只是在 *yOz* 平面内的分布。）

图 6 *xOy* 平面的电场线

*y*

*x*

*O*

A

B

图 7 *yOz* 平面的电场线

A

B

*y*

*z*

*O*

把图 6 和图 7 放在一起，我们就可以比较全面地了解电场线在空间的分布情况了。从 *O* 开始沿 *y* 轴方向到 A 再到 B，它附近的电场线沿 *x* 方向是逐渐靠近的，或说是逐渐变密的；而沿 *z* 轴方向则是逐渐远离的，或说是逐渐变稀疏的。但这仅仅是两个特殊平面上电场线的分布情况，而电场线的疏密要从立体上看，即要在垂直于电场的方向上选取一个小面元，看穿过该小面元的电场线条数，因此我们不能仅仅根据图 6 就认定电场线在 B 点附近比在 A 点附近更密集。

## 三、引入“电场管”概念

赵凯华、陈熙谋二位先生合著的《电磁学》（下面简称《电磁学》）第 4 版第 34 页引入了“电场管”的概念，“我们先引入一个概念——电场管。由一束电场线围成的管状区域，叫作**电场管**。由于电场线总是平行于电场管的侧壁，因而没有电场强度通量穿过侧壁。”

电场管其实是电场线概念的扩展，我们可以把原来数目有限的每一条电场线都扩展成一根电场管，每个电场管内有很多条电场线，这样就相当于把原来的一条电场线“细化”为电场管内的多条电场线。下面我们就按照这个思路进行讨论。

设 *O* 点固定一个孤立的点电荷 + *Q*，则它的电场线在空间呈均匀放射状分布，设共有 *N* 条电场线，我们将其扩展成 *N* 根电场管，每根电场管的侧壁都是一个圆锥面，其顶点为 *O* 点，立体角为 4π/*N*。

现在有两个电荷量都是 + *Q* 的点电荷，分别位于 *x* 轴上 – *l*/2 和 + *l*/2 处，两电荷周围空间各有 *N* 根电场管，空间共 2*N* 根电场管。由于两个电场的叠加，所以这些电场管的形状都发生了改变。除了沿 *x* 轴方向相向的电场管以外，其余各根电场管的侧壁都变弯曲了，但并没有更大的改变；沿 *x* 轴方向相向的两根电场管却发生了翻天覆地的变化：原来两根独立的、相向而行的电场管分别向四周扩展，完全融合在一起，成为一个“电场饼”，这个“电场饼”是关于 *yOz* 平面对称的，它的源头分别在两个点电荷处，其样子有点像两朵盛开的喇叭花，花蕊相对，两边花瓣相距最近处，即“电场饼”的最“薄”处应该在离 *O* 点距离 *r* = *l* 处的圆周上，而后随着 *r* 距离变大又逐渐变“厚”。如图 8 所示，是这个“电场饼”在 *xOy* 平面内的截面图，其中画斜线的部分即是它的内部，该图形绕 *x* 轴旋转一周所得到的旋转体就是这个“电场饼”的全貌。

*y*

*x*

*O*

+*Q*

+*Q*

D

C

图 8 两根电场管融合成一个“电场饼”

这个“电场饼”内有很多条电场线，这些电场线分别由 C 点和 D 点处的点电荷发出，它们中有些仍分别在 *yOz* 平面的两侧向无穷远延伸，但也有些真正“融合”在一起，在 *yOz* 平面内呈放射状排布。可以这样说：引入电场管的概念，相当于拿一个“放大镜”观察电场线图，由于“放大镜”的作用，我们看到了更多、更细致的电场线。

引入电场管概念的好处之一，是可以更方便地选取“高斯面”：由于电场管的侧壁没有电场线穿过，因此对于同一根电场管，穿过它的任意截面的电场线条数，即电场强度通量都相等，而电场管的截面越大的地方电场线的数密度越小，即电场强度越小；反之，电场管截面越小的地方，电场线数密度越大，即电场强度越大。下面我们为了简便，沿着等势面截取电场管，由于该电场管内的所有电场线都垂直穿过那些截面，我们把这些截面称为“高斯面的有效部分”，在同一个电场管上截取的所有“高斯面的有效部分”都垂直穿过相同数量的电场强度通量，因此我们可以根据这些“高斯面的有效部分”的面积的大小判定该处场强的大小。

如图 9 所示是《电磁学》上的图 1–47（b），图中电场线用虚线表示，而等势面则用实线表示。我们只研究从两个点电荷出发相向而行，并最终完全融合在一起的那两根电场管，并在图 9 中所画出的等势面的位置截取 5 个“高斯面的有效部分”，如图 10 所示，是它在 *xOy* 平面的平面图，其中标注着①—⑤的就是在等势面位置处所截取的 5 个“高斯面的有效都分”。可以看出，①—③这三个“高斯面的有效部分”是独立的，它们的形状都是类似球冠的曲面，穿过它们的电场强度通量都等于 *Q*/*Nε*0，由于这三个“高斯面的有效部分”的面积逐渐增大，因此它们所在处的场强逐渐减小。而④和⑤处两个正电荷的电场管已经融合成一个，它们的形状是一个圆环状，穿过它们的电场强度通量都等于 2*Q*/*Nε*0，如图 11 和图 12 所示，是它们的立体图（示意图），可以看出④处“高斯面的有效部分”与⑤处“高斯面的有效部分”很相似，只是④是“凹”下去的，而⑤则基本是“平”的，再有就是宽度 *d* 和半径 *r* 不相同。④的表面“凹”下去，表明穿过它的电场线是向里聚拢的，而⑤的表面基本是“平”的，表明穿过它的电场线是平行的，也就是说该位置大致就是这个“电场饼”的最薄处。④和⑤的“面积”与 *d* 和 *r* 的大小以及表面的形状都有关系，因此不能仅根据 *d* 的大小而确定其面积的大小，也就是不能仅根据两边的电场线的间距确定电场线的疏密，并进一步判定场强的大小。

图 9 等量正电荷电场的等势面

①

②

③

④

⑤

①

②

③

④

⑤

图 10 按等势面截取的高斯面的有效部分

*d*

*r*

图 11 第④个截面的立体形状

*d*

*r*

图 12 第⑤个截面的立体形状

如果我们再向外画出⑥处“高斯面的有效部分”，它与④和⑤的形状也类似，但它的表面是“凸”出来的，这表明通过该处的电场线是向外发散的。