# 4．什么是变化率？

从数学上讲，因变量 *y* 是自变量 *x* 的函数，则 = 称为 *y* 对 *x* 的变化率，而 则称为 *y* 对 *x* 的平均变化率。

在物理学上，经常讨论某物理量随时间变化的关系，因此经常遇到它们对时间的变化率的问题。例如，速度是位置（矢量）对时间的变化率，而加速度是速度对时间的变化率，等等。为了简便，常常简单说速度是位置（矢量）的变化率，而加速度是速度的变化率，等等。这里没有加“平均”二字，只谈变化率，显然指的是瞬时值而不是平均值。

变化量、变化率，二者有何不同？变化率与平均变化率又有什么不同？

## 一、变化量与变化率

因变量 *y* 是自变量 *x* 的函数，一般写作 *y*（*x*），当 *x* 发生变化时，*y* 也随之发生变化。例如，当 *x* 由 *x*1 变为 *x*2 时，*y* 也由 *y*1 变为 *y*2。把 Δ*y* = *y*2 – *y*1 称为 *y* 的变化量，相应 *x* 的变化量 Δ*x* = *x*2 – *x*1。

定义 Δ*y* 与 Δ*x* 的比值，在 Δ*x* 趋近于零时的极限为 *y* 对 *x* 的变化率，写作 ，即 = 。

变化量是同一物理量在两个不同状态下的差，不涉及中间的变化过程。如果该物理量是标量，则求变化量适用算术运算规则。例如，时间是标量，时间的变化量就是两个时刻的算术差。如果该物理量是矢量，则求变化量适用几何运算规则。例加，速度是矢量，求速度的变化量就要用到平行四边形定则。

变化率 是瞬时值，计算变化率一般需要用到高等数学，中学物理教学不使用高等数学知识，因此在中学物理教学中一般只说明变化率的意义，除了简单的问题外，很少使用变化率的概念。

在物理学中，很多物理量随时间 *t* 变化的规律是有重要意义的，因此某物理量对时间的变化率的使用频率也是最高的，为了简便，常常省略“对时间”三个字，只说某物理量的变化量或变化率。例如，速度是位置（矢量）对时间的变化率，加速度是速度对时间的变化率，常常简称为速度是位置（矢量）的变化率，加速度是速度的变化率，等等。

物理学中还有很多问题讨论的不是物理量随时间的变化关系，而是讨论空间分布的问题，即物理量随空间位置变化的问题。例如，静电场的电势 *φ* 和场强 *E* 都是空间分布的函数，并且场强等于电势梯度的负值。所谓“梯度”，通常是指某物理量的空间变化率。以电荷量 *Q* 的点电荷的电场为例，距离点电荷为 *r* 的电势 *φ* = *k*，沿某一条电场线方向上电势逐渐降低，其空间的变化率 = − *k*，它的负值即为场强 *E* = *k*。

## 二、变化率与平均变化率

变化率即指对时间的变化率，它是物理量的变化量 Δ*y* 与 Δ*t* 的比值当 Δ*t* → 0 时的极限，即它是瞬时值。以速度为例，它的定义是 ***v*** = = ，它指的是瞬时速度。而= ，称为 Δ*t* 时间段的平均速度。平均速度的“平均”二字不能省略，而瞬时速度的“瞬时”二字是可以省略的，我们通常说的“速度”，都指瞬时速度，而不是平均速度。

在中学物理教学中，真正用到变化率一词的情况不多，唯一的一个定律就是法拉第电磁感应定律：电路中感应电动势的大小，跟穿过这一电路的磁通量的变化率成正比。

这里说的“磁通量的变化率”，显然指的是瞬时值，即 。如果说法拉第电磁感应定律的公式就是 *E* = ，即用平均值代替瞬时值，似有偷换概念之嫌。

在很多与感应电动势有关的问题中，穿过电路的磁通量作周期性变化，例如按正弦规律变化，此时如果所取的时间段是该变化周期的整数倍，则磁通量的变化量 Δ*Φ* = 0，那么 *E* = = 0，但这不能说明整个过程中没有感应电动势产生，而是这段时间内的感应电动势有时为正、有时为负，其平均值为零。

法拉第电磁感应定律说的是每一时刻“电路中感应电动势的大小”，都跟这一时刻“穿过这一电路的磁通量的变化率”成正比，即感应电动势和磁通量的变化率均指的是瞬时值，而非平均值。

下面这道例题有利于学生理解电磁感应定律中的磁通量变化率指的是瞬时值。

**例** 如图 1 所示，细直导线 PQ 内通有恒定电流 *I*，矩形线圈 abcd 从位置（Ⅰ）匀速运动到位置（Ⅱ）的整个过程中，线圈 abcd 内的感应电流（ ）。

P

a

d

c

b

a

d

c

b

（Ⅱ）

（Ⅰ）

图 1 线圈在非匀强磁场中运动

Q

*I*

A．任何时刻都不为零 B．有一个时刻为零

C．有两个时刻为零 D．有三个时刻为零

这道例题问的是感应电流的瞬时值，用平均值公式 *E* = 不能解决问题。中学阶段无法用解析的方法求得磁通量变化率的表达式，但可以通过画磁通量 *Φ* 随时间 *t* 变化的定性关系图像得出结论。如图 2 所示，时间为零时线圈的位置在（Ⅰ），此时穿过线圈的磁通量为 *Φ*0，随着线圈向左移动，*Φ* 逐渐增大，至 ab 边与直导线重合时（图中的 *t*1 时刻）达到最大值 *Φ*m，而后 *Φ* 逐渐减小到零再逐渐反向增大，至 cd 边与直导线重合时（图中的 *t*2 时刻）达到最大值，而后逐渐减小。图像中切线的斜率就等于该处的变化率，图中 *Φ* 最大的两个时刻 *t*1 和 *t*2 的图线切线是水平的，即这两个时刻的变化率为零，即因此选项 C 正确。

*t*

*t*1

*t*2

*t*3

*Φ*

*Φ*m

*Φ*0

− *Φ*0

− *Φ*m

*O*

图 2 穿过线圈的 *Φ* – *t* 图（定性）

当然，磁通量变化率的平均值也是有用的，例如，求某段时间内通过导体截面的电荷量时，就可以用这段时间内的磁通量变化率的平均值求出这段时间的平均感应电动势、平均感应电流的值，而后求出通过导体截面的电荷量。但在求某段时间内消耗的电能等问题时，就不能用平均值了。