# 48．绳上横波传播过程中各点的回复力与能量如何分布？

沿绳传播的一维简谐波，在其传播过程中，波动图像是正弦曲线，其中每个质元都随时间做简谐运动，因此它受到的回复力与位移成正比且方向相反，即位于峰值处的质元受到的回复力最大而位于平衡位置处的质元受到的回复力为零。这里说的回复力是从效果上说的，它是由两边相邻的质元提供的。

处于平衡位置处的质元，速度最大，从而动能最大，并且势能密度也最大；处于峰值处的质元速度为零，因而动能也为零，并且势能密度也最小。

本文只讨论沿绳传播的一维简谐横波，如图 1 所示为一列横波某时刻的波动图像，其中 A 为最高点，B 为处于平衡位置的点，C 为 A、B 间的任一点。

*x*

*y*

A

*O*

图 1 沿绳传播的简谐横波

C

B

## 一、各质元的受力情况

沿绳传播的一维简谐横波，在波的传播过程中，各质点（确切地说是质元，下同）都在做简谐运动，它们的振幅 *A* 和周期 *T* 都相等，只是相位不同。做简谐运动的质点，受到的合力大小与位移成正比，方向总是指向平衡位置，因此称为回复力。图 1 中的质点 A 此时处于位移最大的位置，受到的回复力（即合外力）也最大；质点 B 此时位移为零，受到的回复力也为零。

在简谐横波传播过程中，绳上各质点都与两边相邻的质点发生相互作用，它受到的回复力就是两边相邻的质点对它的作用力的合力。定性地看，A 质点位于位移最大处，它两边相邻的质点都在它的下方，对它施加的作用力都是向下指向平衡位置的；B 质点位移为零，即处于平衡位置处，它两边相邻的质点一个在它的上方，另一个在它的下方，两边对它的作用力大小相等、方向相反，合力为零。C 点位于 A、B 之间，它两边相邻的质点也是一个在它的上方，另一个在它的下方，但下方质点对它向下的拉力大于上方质点对它向上的拉力，其合力向下，即与位移的方向相反，并且满足 *F*合 = − *kx* 的关系。

## 二、简谐波传播过程中的能量分布

图 1 中位于 A 点处的质点此时速度为零，动能为零，同时该处势能密度也最小；位于 B 点处的质点此时刻速度最大，动能最大，同时该处势能密度也最大。至于为什么说 A 点附近势能密度最小而 B 点附近势能密度最大，一般这样通俗地进行解释：如图 2 所示，分别以 A 点为中心及以 B 点为中心各取**一小段**长度相等的 Δ*x*，可以直观地看出 A 点附近一段绳由平直的变成了凸形的，可以想象出来，所取的形变量 Δ*x* 越小，则越接近平直，Δ*x* 无限小时（Δ*x* 变为 d*x*），形变趋近于零；而 B 点位于平衡位置处，同样以它为中心取**一小段** Δ*x*，这一小段绳由平直的变成了倾斜的，由于正弦曲线在峰值附近的变化率为零，而在平衡位置附近变化率最大，即 B 点附近的形变量大于 A 点附近的形变量。

图 2 简谐横波传播过程中的形变

A

B

*v*

Δ*x*

Δ*x*

这与前面关于回复力的论述并不矛盾，即 A 点受到的回复力最大，是因为两边相邻的质点对它的作用力方向一致，而它附近势能密度最小，是因为它附近发生的形变最小；B 点受到的回复力为零，是因为两边相邻的质点对它的作用力相互抵消了，它附近的势能密度最大，是因为它附近发生的形变最大（这只是通俗的、定性的解释）。

## 三、对绳上简谐横波的半定量解释

说绳上某质点的动能是有意义的，它与该质点速度的二次方成正比。说某质点的弹性势能则是没有意义的，因为势能是系统共有的，有意义的是该处的“势能密度”，它应该与 （Δ*x* 为形变量）的二次方成正比。上面图 2 中分别以 A 点为中心及以 B 点为中心各取一小段相等的长度 Δ*x*，比较两处的形变，指的是剪切形变，这是因为绳上传播的是横波，而产生横波的连续介质中质元间的作用力是切向力，因此讨论绳的形变不能从长度变化上看，而应该把绳看作由很多沿与绳垂直方向运动的小薄层作为质元构成的，如图 3 所示，波峰和波谷是由于相邻质元间发生的剪切形变而形成的。这样“势能密度”应该与 （相对形变率）的二次方成正比，由于我们讨论的是某确定时刻的问题，各质元的位移 *y* 只是 *x* 的函数，即 *y* = *A*sin（*x* + *φ*0），则 = *A*ʹcos（*x* + *φ*0），图 4 中的实线表示位移 *y* 随 *x* 变化的图线，A 点为波峰位置，B 点为平衡位置。虚线表示 的图像，不难看出，在 A 点处，它等于零，而势能密度 *ω*p = 。即 A 点的“势能密度”为零，而在 B 点处它的 值最大，即 B 点处的“势能密度”最大。

图 3 横波传播过程中绳的形变

A

B

*v*

图 4 简谐横波的位移与速度的空间图像

以上解释是合理的，但学生会有新的疑惑：A 点附近各质元此时的加速度应该最大或接近最大，B 点此时的加速度为零，B 点附近各点的加速度都很小。A 点附近各质元此时的加速度很大，是否表示 A 点附近的相对形变率不是零而是很大呢？B 点附近各质元此时的加速度接近零，是否表示 B 点附近的相对形变率很小呢？

对于 B 点，我们可以这样解释：B 点两侧虽然相对形变率较大，但两侧施加的应力方向相反，它们相互平衡，因此加速度为零，但对除 B 点外的其他点用这种解释难以令学生满意。

以下是合理的解释：绳上各处的质元之所以产生加速度，是由于其两侧的质元对其有作用力，而两侧的质元之所以对它有作用力，是因为绳发生了剪切形变。除了 A 点（波峰及波谷处的质元）以外，绳上其他质元（如图 1 中的 C 点）受到两侧相邻质元的作用力（应力）方向都是相反的，即所受的合力是其两侧应力大小之差，其差值绝对值的大小与**相对形变率随 *x* 的变化率成正比**，即 *F*回 ∝ 。

由于 *y* = *A*sin（*x* + *φ*0），则 = − *A*ʺsin（*x* + *φ*0），在 A 点附近，的绝对值接近最大值，因此这些质元受到的应力的合力很大，从而加速度很大；而在 B 点附近，的绝对值等于或接近于零，即它受到的应力的合力等于或接近于零，因此加速度等于零或接近于零。

对 A 点来说，它的 = 0，这表示该点此时刻没有发生形变，因此势能密度为零，但 ≠ 0，而且是最大值，表示该点两侧发生了形变，因此对 A 点处的质元有弹力作用，从而要产生较大的加速度。

更一般的情况，波传播过程中各质元的位移 *y* 是时间 *t* 和位置 *x* 的二元函数，即 *y* = *A*sin（*t* − *x* + *φ*0），某处的势能密度 *ω*p ∝ ，该处质元受到的回复力 *F*回 ∝ 。

## 四、绳上简谐横波能量的定量计算

绳上简谐横波质元的位移 *y* = *A*cos（*t* − *x* + *φ*0），取一长度为 Δ*l* 的小段为研究对象，设它单位长度的质量（线密度）为 *λ*，则它的质量 Δ*m* = *λ*Δ*l*。

它的动能与势能相等，即 Δ*E*k = Δ*E*p = *λ*Δ*l* = *λ*Δ*lω*2*A*2sin2（*ωt* − *kx*），式中 *k* = 。它的总机械能 Δ*E* = Δ*E*k + Δ*E*p = *λ*Δ*lω*2*A*2sin2（*ωt* − *kx*）。

定义能量密度为单位长度的总机械能，即 *ρ*E = = *λω*2*A*2sin2（*ωt* − *kx*）。

设波的传播速度为 *v*，定义单位时间内传输的能量为平均能流密度 *I* = *λvω*2*A*2，它表示单位时间内该简谐波从振源向外传输的机械能为 *λvω*2*A*2，它与振幅 *A* 的二次方成正比，也与频率 *ω* 的二次方成正比。用平均能流密度可以分析超声波具有较大能量的原因。