# 44．受迫振动有哪些常见的驱动方式？

受迫振动是振动系统在外界周期性驱动下所做的振动，外界周期性的驱动一般说成是周期性的力，实际上更多的是周期性的位移，二者效果相同。

振动系统不是一个质点，而是一个系统。常见的课堂演示用的振动系统有两种：一种是弹簧振子，它由一个轻弹簧和一个可以看作质点的小球组成；另一种是单摆，它由一个不可伸长的轻绳和一个可以看作质点的小球组成。由于阻尼的存在，自由振动总会衰减直到停止。在外界周期性的驱动下所做的振动称为受迫振动，周期性的驱动不一定是周期性的外力，更多地采用周期性的位移驱动。

## 一、两种常见的振动系统的驱动方式

图 1 和图 2 分别是沿竖直方向振动的弹簧振子和单摆，它们是物理教学中主要介绍的振动系统，前者是沿直线的振动，后者是沿一段圆弧的振动，分别称为线振动和角振动。

*O*

图 1 弹簧振子

*O*

图 2 单摆

在周期性外力作用下的振动称为受迫振动，但怎样把周期性的外力加到振动系统上呢？

对于图 1 所示的弹簧振子，有两种方法：一是直接加到下面的重物（振子）上，另一种是加到弹簧的上端点，即上面的悬点 O 处。如果要加到振子上，最好的方法是让它带上电荷，利用周期性变化的电场对它施加电场力。但我们更多的是如在上端点 O 处，如图 3 所示：把弹簧的上端 O 固定于一个约束在竖直方向运动的 T 形支架 D 的下端，D 的横梁有一凹槽，竖直平面内转动的圆盘 A 的边缘有一个突起小圆柱体 B，它嵌在 D 的水平凹槽内。当圆盘匀速转动时，圆柱体 B 做匀速圆周运动，带动支架 D 沿竖直方向做简谐运动，施加在弹簧振子上端 O 点的是简谐性的位移驱动。

*r*

B

D

A

C

O

*ω*

图 3 给弹簧振子施加简谐性的位移驱动

同样的情况出现在单摆中：一种方法是直接加在摆球上，最好的方法仍然是让它带上电荷，利用周期性变化的电场对它施加电场力。也可以加在细线的上端点 O 处，如图 4 所示：在支架上拉一条细线，右端固定在支架上的 A 点，左端从支架的 B 孔中穿过，然后与一个沿 *x* 方向做简谐运动的振源连接（振源未画出，细线要绷紧），在 AB 中点 O 处拴上另一根细线，下面连接一个重球组成一个单摆。振源开始振动，振动通过细线传递，对单摆的上端 O 点施加一个简谐性的位移驱动，单摆会在竖直平面 *xOy* 内做受迫振动。

A

O

B

*O*

*x*

*z*

*y*

*m*

图 4 在水平绳 B 端施加简谐性位移驱动

## 二、两种驱动的效果相同

### （1）弹簧振子

如图 3 所示的弹簧振子，弹簧上端点 O 受到 T 形支架 D 的带动而做简谐运动，从而对下面的弹簧搌子（振动系统）产生周期性的位移驱动。问题是，外界对弹簧振子这个振动系统是否产生周期性的驱动力呢？

把图 3 加以简化，只画弹簧振子本身，如图 5 所示。图 5（a）画的是外界驱动尚未启动，振子（重球）处于静止状态时的情景，这时弹簧的长度为 *L*（弹簧原长为 *L*0），重球受到的合力为 0，即弹簧的弹力 *f*弹 = *k*（*L* – *L*0）、重力 *mg* 及液体对球的浮力 *f*浮 三力满足 *f*弹 + *f*浮 = *mg*。

*L*

O

O

O

O

*x*1

*x*1

*x*2

*x*2

图 5 对弹簧振子的位移驱动

（a）

（b）

（c）

（d）

此后弹簧的上端点 O 开始做简谐运动，设初始时 O 点位于振动的平衡位置（这个假设只是为了使数学表达式简单），它的振幅为 *r*（即图 3 中圆柱体 B 的转动半径），圆频率为 *ω*，则 O 的位置随时间变化的关系是 *x*1 = *r*sin*ωt*。

弹簧长度的变化受上、下两端点运动的影响，情况比较复杂，我们采用把复杂问题分解为简单问题的方法：①如果 O 点开始振动后，重球仍然保持原来的位置不变，设某时刻 O 点发生的位移为 *x*1，如图 5（b）所示，则弹簧弹力的变化为 *f*弹ʹ = *kx*1 = *kr*sin*ωt*，它是简谐性的周期性变力。

②如果上端 O 点保持静止不动，某时刻弹簧下端伸长 *x*2，如图 5（c）所示，则弹簧弹力的变化为 *f*弹ʺ = − *kx*2。

实际情况是，上端点 O 和下端点（重球）的位置都要发生变化，即上面的①②两种情况同时发生，如图 5（d）所示，设某时刻其上端点 O 的位移为 *x*1，下端点的位移为 *x*2，则弹簧长度的伸长量为 Δ*x* = *x*2 – *x*1，弹簧弹力的变化为 *f*弹 = *f*弹ʹ + *f*弹ʺ = − *k*（*x*2 – *x*1）= − *kx*2 + *kr*sin*ωt*。

对比振子的动力学方程 *m* + *γ* + *kx* = *F*0cos*ωt*，*γ* 为阻力系数，*k* 为弹簧劲度系数，*f*弹ʹ 正是回复力，而 *f*弹ʺ 弹正是驱动力。就是说，T 形支架对弹簧上端点 O 的简谐性位移驱动，通过弹簧传递到下端的重球，就成了简谐性的驱动力。

### （2）单摆

单摆是角简谐运动，用角量表示的动力学方程是 Σ*M* = *I* ，式中 *M* 是力矩，*I* 是转动惯量。对单摆来说，质量为 *m* 的摆球、长为 *l* 的细线，对悬点的转动惯量 *I* = *ml*2。

仍以图 4 所示的装置为例，通过细绳 BA 对单摆的悬点 O 施加一个简谐性的位移驱动，画出 *xOy* 平面的投影图，如图 6 所示。图 6（a）是未加驱动，单摆处于静止时的状态。单摆在受迫振动过程中，上端的悬点 O 及下端的重球都要发生运动，情况比较复杂，我们仍采用把复杂问题分解为简单问题的方法进行分析。

*O*

*x*1

*x*2

*x*2

*l*

*l*

*l*

*l*

*θ*

*θ*

*f*惯

*m*

*x*

*y*

*y*

*y*

*y*

*x*1

*x*1

*O*

*O*

*O*

*mg*

*mg*

（a）

（b）

（c）

（d）

图 6 对单摆的位移驱动

①如果上端的悬点 O 沿 *x* 方向发生振动，其位移 *x*1 = *r*cos*ωt*，而下端的重球与 O 点相对静止，设某时刻 O 点沿 *x* 方向的位移为 *x*1 方向向右且正处于加速状态，由于 O 点相对地面参考系做简谐运动，O 点作为参考系就是非惯性系，则重球要增加惯性力 *f*惯 = − *m* ，其方向如图 6（b）所示，它对 O 点的力矩为

*M*1 = − *ml* = − *mlrω*2cos*ωt*

负号表示方向沿顺时针转动方向。

②如果上端的悬点 O 保持静止不动，下端的摆球某时刻向右摆动 *θ* 角，其位移为 *x*2，如图 6（c）所示，则重力 *mg* 对 O 点的力矩为 *M*2 = − *mgx*2 = − *mgl*·sin*θ* ≈ − *mgl*·*θ*，负号表示方向为沿顺时针转动方向。

实际情况是，悬点 O 和下面的摆球的位置都要发生变化，即上面的①②两种情况同时发生，设某时刻其悬点 O 向右的位移为 *x*1，摆球相对 O 点的水平位移为 *x*2，相应的角位移为 *θ*，如图 6（d）所示。摆球还受到介质的阻力 *f*阻 = − *γv* = − *γ* ，由于 *x*1 = *r*cos*ωt*，*x*2 ≈ *l*·*θ*，*f*阻 = *γ*（*ωr*sin*ωt* – *l* ）。

摆球用角量表示的动力学方程为 *ml*2 + *γl*2 + *mglθ* = *γωrl*sin*ωt* + *rmω*2*l*cos*ωt*，

两边消去 *l*，得 *ml* + *γl* + *mgθ* = *γωr*sin*ωt* + *rmω*2cos*ωt*，

利用三角函数求和，有 *γωr*sin*ωt* + *rmω*2cos*ωt* = *F*0cos（*ωt* + *φ*）

式中 *F*0 = *mωr*= *mωr*；tan*φ* = − = − 。

再设 *f*0 = *F*0/*ml*，*ω*02 = *g*/*l*，上述方程可写为

+ 2*β* + *ω*02*θ* = *f*0cos（*ωt* + *φ*）

方程的解为

*θ*（*t*）= *A*e−*βt*cos（*ω*0*t* − *α*）+ *A*0cos（*ωt* + *φ*）

它是用角量表示的受迫振动的解。

注意：上面的公式原文如此，疑似有误，好像应该是：

*θ*（*t*）= *Ae*− *βt*cos（*t* − *α*）+ *A*0cos（*ωt* + *φ*）

## 三、两种装置在教学中的作用

在中学物理关于阻尼振动和受迫振动的教学中，一般安排三组演示实验：①观察阻尼振动的振幅逐渐减小，最后停止；②观察受迫振动中，振动频率或周期在稳定后等于外界驱动力的颍率或周期，而与固有频率或周期无关；③共振，即当外界驱动力的频率与固有频率相等时振幅最大。

如图 3 所示的弹簧振子，可以承担上述三项任务：①由于振子浸在油中，阻尼较大，演示阻尼振动的振幅随时间减小而逐渐停止，非常适合；②演示受迫振动时，同样由于阻尼较大，能较快达到稳定，从而可以明显地看到稳定后的频率等于外界驱动的频率而与固有频率无关；③逐渐调节外界驱动的频率，可以明显地观察到共振现象。

如图 4 所示的装置由于单摆在空气中振动，阻尼很小，要观察阻尼振动的振幅逐渐减小最终停止，需要较长的时间，不适合在课堂教学中演示。同样，由于阻尼太小，启动外界的驱动后，很难达到稳定状态，因此用它无法在课堂上演示受迫振动达到稳定后的振动频率与驱动力的频率及固有频率间的关系。唯一能做的是共振，即当外界驱动的频率等于其固有频率时，振幅达到最大。在用如图 4 所示的装置演示共振现象时，需要方便地调节驱动的频率，并且最好能测量并读出驱动频率的数值。

一般情况下，课堂上采用的装置是耦合摆，如图 7 所示，在支架上固定一根水平方向的细绳，在线上并排悬挂 A、B、C、D、E 等多个摆长不等的单摆，使其中的 A 摆的摆长与另一个单摆，例如 D 摆的摆长相等，而其余各摆的摆长或者较长或者较短。演示时先用手推动 A 摆球使其开始振动，同时上端点 A 产生水平方向的振动，它又通过水平线给其余各摆以位移驱动，即把 A 摆作为驱动其他各摆的外界，能观察到与 A 摆摆长相等的 D 摆的振幅最大，而其他各摆振幅则都很小且不稳定。这个装置有一个不足，即当 D 摆的振幅达到最大时，会产生能量反向传递的过程，D 摆将作为外界驱动其余各摆，而最后又几乎将全部能量都传回给 A 摆，再以后则重复以上过程，对这种现象学坐一般都很感兴趣，但它也分散了学生的注意力，对时间有限的课堂教学可能起到干扰作用，因此教师大都在 D 摆振幅达到较大时停止实验。这个实验装置如果与如图 4 所示的装置结合起来，如图 8 所示，仍然只固定细绳的 A 端，而 B 端则连接到一个外界驱动的沿水平方向振动的振源上，细绳上悬挂长短不一的多个单摆，逐渐从低到高调节外界驱动的频率，可以见到不同摆长的摆振幅都有可能达到最大值，这可能更有助于学生理解共振的现象。

A

A

图 7 耦合摆

C

D

E

B

A

A

B

图 8 对耦合摆的改进