# 42．匀速圆周运动与简谐运动有什么关系？

匀速圆周运动与简谐运动都是周期性运动。在平面直角坐标系中，匀速圆周运动的两个分运动都是简谐运动，或者说匀速圆周运动沿两个坐标轴的投影是简谐运动，通过匀速圆周运动讨论简谐运动是常用的方法。

匀速圆周运动与简谐运动有密切联系，在中学物理教学中，充分利用它们二者的联系，对于学生认识简谐运动有很大好处。

## 一、在平面直角坐标系里的匀速圆周运动

以圆周运动轨迹的圆心为坐标原点，建立平面直角坐标系，如图 1 所示，半径为 *r*，起始时刻位置为 A 点，过 A 点的半径与 *x* 轴的夹角为 *θ*，则 A 点的坐标为（*r*cos*θ*，*r*sin*θ*）。A 点沿 *y* 方向的分运动的位移是 *y* = *r*sin（*ωt* + *θ*），其中 *ω* 是角速度，它与线速度的关系是 *v* = *ωr*。图 1 中右侧图是 A 点的 *y*–*t* 图像。同样，沿 *x* 方向的分运动的位移是 *x* = *r*cos（*ωt* + *θ*）。即匀速圆周运动在平面直角坐标系中的两个分运动都是简谐运动，它们的振幅和圆频率相等，相位差 π/2。

*x*

*O*

*t*

*T*

*θ*

*r*

*v*

*y*

A

*y*

*T*/2

*O*

图 1 匀速圆周运动的分运动是简谐运动

把图 1 中速度 *v* 沿两坐标轴进行正交分解，得到两个分速度随时间变他的规律：*vx* = − *v*sin（*ωt* + *θ*），*vy* = *v*cos（*ωt* + *θ*）。

在图 1 中画出质点在 A 点时加速度 *a* 的箭头，它的大小为 *a* = *ω*2*r*，方向指向圆心，即坐标原点 O，把 O 沿两坐标轴进行正交分解，得到两个分加速度随时间变化的规律：*ax* = − *a*cos（*ωt* + *θ*），*ay* = − *a*sin（*ωt* + *θ*），它与前面的分速度一样，都是随时间按正弦或余弦规律变化的。

这些结论，与从两个分位移随时间变化的关系式出发，用求导的方法所得到的结果一致，由于中学阶段不要求使用高等数学知识，因此用这种图示的方法在中学物理教学中是比较适宜的。

## 二、圆周运动的投影是简谐运动

上述匀速圆周运动在平面直角坐标系中的两个分运动，就是它在两个坐标轴上的投影，但上面的推导终究属于理论推导，学生可能更信服实验得出的结论。要让学生看到匀速圆周运动的投影的确是简谐运动，并不困难：如图 2 所示，在一个绕竖直轴转动的圆盘的边缘处，安一根支柱，上面固定一个小球，用直流电动机带动圆盘匀速转动，则小球在水平面内做匀速圆周运动。在左边放置一个平行光源，与小球的转动平面在同一高度，在右边放一块半透明的屏幕，就可以利用屏幕观察投影的结果。如果在它的转轴上方与屏幕平行的平面放置一个沿水平方向振动的弹簧振子，作为对照，效果会更好。

平行光束

*ω*

屏幕

图 2 演示匀速圆周运动的投影装置

还可以增加一个振动平面与屏幕平行的单摆。（需要精心调墼直流电动机的转速，使它的周期与弹簧振子的周期相等，且运动同步。）

还可以在小球上固定一个沿切线方向的箭头表示速度 *v*，或者固定一个指向圆心方向的箭头表示加速度 *a*，使箭头随小球一起做匀速圆周运动，投影上就可以显示出速度或加速度的投影，它们也满足简谐运动中的规律。

匀速圆周运动与简谐运动的关系，在实际中有不少应用，图 3 中圆盘 A 位于竖直平面内，其边缘处有一突出的圆柱体 B，嵌在竖直平面内运动的水平框架 D 内。圆盘匀速转动时，柱体 B 在竖直平面内做匀速圆周运动，此运动在竖直方向的投影按余弦规律变化，则框架 D 的运动是简谐运动，从而给下面的弹簧振子施加一个简谐的位移驱动。

*r*

B

D

A

C

O

*ω*

图 3 把匀速圆周运动转换为竖直方向的简谐运动

## 三、用极坐标描述匀速圆周运动

如图 4 所示，质点 4 做匀速圆周运动，虚线是它的运动轨迹。以它的运动轨迹的圆心为极点 *O*，射线 *Ox* 为极轴，则平面内任意点的位置都可用极径 *ρ* 和极角 *θ* 两个坐标描述，其中极径 *ρ* 为该点到极点 O 的距离，极角 *θ* 为该点与极点 O 的连线与极轴 *Ox* 的夹角，规定沿逆时针方向转动为极角增大的方向，或称为正方向。对于做匀速圆周运动的质点而言，极径 *ρ* 是定值，因此只需要用极角 *θ* 一个参量就可以描述它的位置，因此称 *θ* 为角位置。如此说来，使用极坐标描述圆周运动是非常方便的。

*x*

*O*

*θ*1

*v*

*y*

A

*ρ*

图 4 用极坐标描述匀速圆周运动

B

*θ*2

如图 4 所示，质点从 A 点移动到 B 点，相应的极角由 *θ*1 变到 *θ*1，则角位移 Δ*θ* = *θ*2 – *θ*1 > 0。需要说明的是，我们规定沿逆时针转动的方向为极角的正方向，却不是说极角的方向是沿圆周的切线方向。沿圆周的切线方向是质点速度 *v*（线速度）的方向，*θ* 和 Δ*θ* 的方向都由右手螺旋法则确定，为垂直纸面向外，即 *z* 轴正方向。

角速度 *ω* 定义为角位置 *θ* 对时间 *t* 的变化率，即 *ω* = = $\lim\_{Δt\to 0}\frac{Δθ}{Δt}$，角速度是矢量，如图 4 所示，沿逆时针方向转动的质点的角速度方向为垂直纸面向外。

匀速圆周运动是角速度恒定的圆周运动，其运动方程为 *θ* = *ωt* + *θ*0，它与匀速直线运动的位移公式相对应。

对于非匀速圆周运动，角速度 *ω* 是变化的，定义角速度 *ω* 对时间的变化率为角加速度 *β*，即 *β* = = 。角加速度 *β* 也是矢量，如果它的方向与角速度 *ω* 的方向相同，表示角速度随时间增加而增大；反之，它的方向与角速度 *ω* 的方向相反，表示角速度随时间增加而减小。如图 4 所示，沿逆时针方向转动的质点，*ω* 增大时 *β* 的方向为垂直纸面向外，与 *ω* 的方向相同；*ω* 减小时 *β* 的方向为垂直纸面向里，与 *ω* 的方向相反。当 *β* 为恒量时，质点做匀角变速运动，其运动方程为 *ω* = *βt* + *ω*0，*θ* = *ω*0*t* + *βt*2。它们与匀变速直线运动的速度公式和位移公式相对应。

角速度是反映角位置变化快慢的物理量，也是反映线速度方向变化快慢的物理量，角加速度则是反映角速度变化快慢的物理量。

角加速度与加速度是不同的物理量，前者反映的是角速度变化的快慢和方向，后者反映的是速度矢量变化的快慢和方向，而速度矢量的变化可能是由速度大小变化引起的，也可能是由速度方向变化引起的。可以把加速度 ***a*** = 分解为切向加速度 *a*τ 和法向加速度 *a*n，其中 *a*τ = *β*·*ρ* = （其中 *v* 是速率而不是速度），它反映了速度大小变化的快慢；*a*n = *ω*·*v*，它的大小既与角速度 *ω* 有关，也与速度 *v* 的大小有关，其中 *ω* 是反映速度方向变化快慢的物理量。

对于匀速圆周运动，*ω* 恒定，即只有 *a*n 而没有 *a*τ，加速度指向圆心，受到的合外力也指向圆心；对于变速圆周运动，则既有 *a*n 也有 *a*τ，合加速度不指向圆心，受到的合外力也不指向圆心。