# 40．什么是简谐运动的运动学判据和动力学判据？

从运动学上看，物体的位移（或其他物理量）随时间按正弦规律变化，就称为简谐运动，有时也称简谐振动。从动力学上看，质点受到的力与位移成正比且方向相反（*F* = − *kx*），或者其势能与位移的二次方成正比（*E*p = *k*ʹ*x*2），该质点就做简谐运动。前者称为运动学判据，后面两个称为动力学判据。两个判据并非完全等价。

怎样判定物体是否做简谐运动呢？《新概念物理教程力学》（赵凯华、罗蔚茵著）中有一段话给出了明确的回答：概括起来，从动力学的角度看一个物体是否在做简谐振动，可以从势能与位移之间的平方函数形式来判断，也可以从力与位移之间的负正比关系来判断。简谐振动在运动学中为时间的正弦或余弦函数，但并非所有做正弦或余弦运动的物体，在动力学中都符合上述判据。

这里给出了两个方面的判据，即运动学判据和动力学判据，本文仅就这两个判据的一些问题谈点个人看法。

## 一、关于简谐运动的运动学判据

高中物理教科书中关于简谐运动的表述是：如果质点的位移与时间的关系遵从正弦函数的规律，即它的振动图像（*x*–*t* 图像）是一条正弦曲线，这样的振动叫作简谐运动。

对于在一条直线上振动的质点，做简谐运动的运动学判据就是“（相对于平衡位置的）位移与时间的关系遵从正弦（或余弦）函数的规律”，用公式表示为 *x* = *A*sin（*ωt* + *φ*0）或 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）。

对于复摆，在小角度的近似条件下，满足“角位移 *θ* 与时间 *t* 的关系遵从正弦（或余弦）函数的规律”，用公式表示为 *θ* = *θ*msin（*ωt* + *φ*0）或 *θ* = *θ*mcos（*ωt* + *φ*0），常常称为“角简谐运动”，以区别做直线运动的“线简谐运动”。

## 二、关于简谐运动的动力学判据

简谐运动的动力学判据有两个，分别简称为“势能判据”（*E*p = *k*ʹ*x*2 或 *E*p = *kx*2）和“力判据”（*F* = − *kx*）。由于质点一般都要受到多个作用力，因此“力判据”中的 *F* 应理解为该质点受到的合力。

为什么说“并非所有做正弦或余弦运动的物体，在动力学中都符合上述判据”呢？实际上，运动学的研究对象并不限于物体或质点。例如，当我们讨论光斑或投影的运动时，研究对象就不是质点，对它们来说，运动学上完全可以满足“做正弦或余弦运动”的条件，但它们谈不上受力，更谈不上势能。

如果我们只讨论做简谐运动的物体（即质点，下同），情况又如何呢？动力学的两个判据要分别讨论，这是因为它们并不完全等价。

简谐运动的运动学判据 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）与动力学的“力判据”*F* = − *kx* 是等价的。

证明如下：若 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0），求导两次，得 *a* = − *ω*2*A*cos（*ωt* + *φ*0），根据牛顿第二定律，*F* = *ma* = − *mω*2*A*cos（*ωt* + *φ*0），设 *k* = *mω*2，则得到 *F* = − *kx*。

反之，若满足 *F* = − *kx*，根据牛顿第二定律，有 *m* = − *kx*，解此二阶微分方程，得到 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）。

这就是说，凡是满足 *F* = − *kx* 的物体，运动学上一定满足 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）；反过来，运动学上满足 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）的质点，其受到的合力一定满足 *F* = − *kx* 的关系。

但对于“势能判据”则不是这样，运动学上满足 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）的质点，虽然它受到的合力满足 *F* = − *kx* 的关系，但其中具体的力不一定是保守力，因此就谈不上势能。例如，用手握住一个物体，人为地使它做简谐运动，该物体受到人手的作用力就不是保守力，也就谈不上势能了。

## 三、一些常见的简谐运动的实例

### 1．水平面上的弹簧振子

位于光滑水平面上的弹簧振子，受到的重力与支持力平衡，回复力就是弹簧弹力，它满足 *F* = − *kx* 动力学的“力判据”，也满足 *E*p = *kx*2 的“势能判据”，是简谐运动。其中 *F* = − *kx* 中的 *F* 是振子受到的回复力，是以振子作为研究对象的；讨论势能问题时，研究对象是振子和弹簧组成的系统。

### 2．沿竖直方向振动的弹簧振子

弹簧上端固定，下端拴一个小球，使它沿竖直方向振动，振动过程中小球受到的作用力有两个，其中重力是恒力，弹簧弹力是变力，二者的合力是回复力。若讨论能量关系，则必须把小球、弹簧和地球组成的系统作为研究对象，振动过程中，重力势能、弹性势能和动能发生相互转化而总能量守恒。同一个弹簧和小球组成的系统，沿竖直方向振动与沿水平方向振动相比较，振动频率相等，只是平衡位置不同。

还可以举出类似的情况：如图 1 所示，在水平的传送带上放一个弹簧振子，弹簧的左端固定在墙壁上，振子与传送带的摩擦不能忽略，并且假定二者间的最大静摩擦力等于滑动摩擦力。开动电机使传送带匀速向右运动，则弹簧将被伸长，伸长到某一位置后振子开始在水平传送带上做简谐运动，它与在光滑水平面上做简谐运动的弹簧振子相比，水平方向多了一个恒定的摩擦力，摩擦力与弹簧弹力的合力作为回复力，振动周期没有变化，只是平衡位置变了而已。但从能量的观点看，摩擦力做功要消耗机械能将其转化为内能，即“摩擦生热”，消耗的这部分能量由“外界”的电动机提供，弹簧的弹性势能与振子的动能相互转化，而总量保持不变。

图 1 在传送带上的简谐振动

实际上．两个物体间的最大静摩擦力总是大于滑动摩擦力，因此上面的分析只在理论上成立。图 1 所示的真实的振子的振动并不是简谐运动，一般称为“自激振动”，传送带开始向右运动的最初阶段，振子与传送带保持相对静止，二者间的摩擦是静摩擦，随着弹簧的逐渐伸长，弹簧弹力逐渐增大，当它达到并超过最大静摩擦力时，振子将向左运动，开始在传送带上滑动，二者间的摩擦力变为滑动摩擦力，直到振子的速度与传送带的速度相等时，二者间的摩擦又变为静摩擦，从而重复开始阶段的运动。如果此后传送带的运动保持匀速，则振子的振动是周期性的，但不是简谐运动，其振动图像大致如图 2 所示，其中弹簧伸长的过程较慢而缩短的过程较快。

图 2 自激振动图像

*x*

*O*

*t*

### 3．漂浮在液面上的密度计在竖直方向上的振动

如图 3 所示，一支液体密度计静止漂浮在液体中，它除了下面的球形部分外，是一支粗细均匀的玻璃管，用外力使它升起一些或者压下一些，忽略运动过程中液体对它的粘滞阻力，释放后它将在液体中振动，只要振动过程中液面高度始终小于玻璃管高度，则它的振动满足 *F* = − *kx* 的动力学判据，是简谐运动。但从能量的观点看问题，浮力一般来说不能算是保守力，谈不上浮力势能，因此“势能判据”在这里不适用（但也有人认为，在这种特定的情况下，液体对密度计的浮力也具有保守力的特点，因此也可以引入“浮力势能”，从而“势能判据”在这里仍然适用。但这只是一家之言，并不为多数人承认）。

图 3 密度计上下振动

### 4．风吹麦穗的振动

我们把麦秆和麦穗简化为如图 4（a）所示的样子，无风时它是直立的。如果外界给它一个扰动，它将会在平衡位置附近振动，如果空气阻力可以忽略，在小角度条件下，属于角简谐运动，如图 4（b）所示，这种扰动包括阵风的影响。

（a）无风时麦穗直立

（b）有扰动时在

平衡位置附近振动

（c）风力恒定时在

新的平衡位置附近振动

图 4 风吹麦穗的振动

如果它受到的风力在一定时间内是恒力，那么它在这段时间内的振动就是在新平衡位置附近的振动，如图 4（c）所示。只有在空气阻力可以忽略且小角度的条件下，才是角简谐运动，但我们说的“风力”，就是空气分子对它的作用力，既然存在“风力”，又要忽略空气阻力，似乎不太现实，因此真实的振动不会是真正的简谐运动。

### 5．波动中某个质元的振动

仅以弹性绳上的横波为例。设有一无限长的绳子，左端质元是波源，在周期性外力作用下沿垂直于绳的方向作简谐运动，则振动沿绳向右传播，理想情况下形成一列简谐横波（行波）。

绳上的每个质元都在做简谐运动，它们在运动学上都符合 *x* = *A*cos（*ωt* + *φ*0）的简谐运动规律，因此它受到的合力（即相邻的质元对它的作用力的合力）也满足 *F* = − *kx* 的关系，即满足简谐运动的“力判据”，但不满足“势能判据”。

若要谈到能量，它与一般孤立系统不同，某个确定的质元的能量不是保持不变的，而是随相位的变化而变化的。波传播过程伴随着能量的传递，对某一个确定的质元来说，在位移逐渐增大的四分之一周期内，从波源一侧输入的能量大于向另一侧输出的能量，在第二个四分之一周期内，即位移逐渐减小的四分之一周期内，从波源一侧输入的能量小于向另一侧输出的能量……而在一个周期内，从波源一侧输入的能量等于向另一侧输出的能量。