# 39．卫星的发射过程能否将卫星与地球当作两体系统？

卫星的发射是利用火箭与向后喷射气体的反冲作用而完成的，前面的火箭（及携带的卫星）与向后喷出的尾气是相互作用的系统。火箭发射的过程，所耗能量的绝大部分都由尾气带走，这些尾气最终与大气作用而转化为内能。中学阶段，学生无法计算卫星发射过程所消耗的能量，而只能计算卫星增加的机械能，包括引力势能和动能，在计算时要以地心为参考系。

两个物体（质点）组成的系统，如果只有相互作用而没有外力作用，这样的系统我们称为两体系统。从地面上发射卫星（或飞船，下同）的过程，能否将卫星与地球当作两体系统呢？

## 一、两体系统的特点

（1）系统的总动量守恒。由于我们定义的两体系统只有相互作用（内力）而没有外力作用，因此系统的总动量守恒。

（2）系统的质心保持匀速运动状态不变，若以质心为参考系，则是惯性系。

（3）系统的总动能，等于整个系统随质心一起运动的动能 *E*kC（*E*kC = *mv*C2）与相对质心的动能 *E*k对质心。（克尼希定理）

（4）引入折合质量 *μ* = 及相对速度 *u* = *v*1 – *v*2，则 *E*k对质心 = *μu*2。克尼希定理可表述为：由两质点组成的质点组，在非质心系中的总动能，等于随质心作整体运动的动能 *E*kC 与两质点相对质心的动能 *E*k对质心 之和。

对于上面（3）（4），我们通过一个例子作简单证明：

设两体系统的两个质点质量分别为 *m*1 和 *m*2，对地速度分别为 *v*1 和 *v*2，方向都向右，如图 1 所示。其质心 C 的对地速度方向也向右，大小 *v*C = 。

图 1 两体系统的质心速度

*m*1

*v*C

*m*2

*v*2

*v*1

C

在质心系中两质点的速度，或者说两质点相对于质心的速度分别为 *v*1ʹ 和 *v*2 ʹ，其大小和方向分别为：*v*1ʹ = *v*1 – *v*C，方向向右；*v*2ʹ = *v*C – *v*2，方向向左。

在地面参考系中总动能为 *E*k = *m*1*v*12 + *m*2*v*22 = *m*1(*v*1ʹ + *v*C)2 + *m*2(*v*C − *v*2ʹ)2。展开后整理，得到 *E*k = （*m*1 + *m*2）*v*C2 + （*m*1*v*1ʹ2 + *m*2*v*2ʹ2）+（*m*1*v*1ʹ − *m*2*v*2ʹ）*v*C。

上式共有三项，其中第一项是系统随质心平动的动能，即 *E*kC = *mv*C2，第二项是两质点相对于质心运动的动能 *E*k对质心，第三项是交叉项，由于 *m*1*v*1ʹ − *m*2*v*2ʹ = 0，因此第三项为 0，从而 *E*k = *E*kC *+* *E*k对质心，此即为上面的（3）的结论。

再引入折合质量 *μ* = 及相对速度 *u* = *v*1 – *v*2，则 *E*k对质心 = *μu*2，此即为上面（4）的结论。

## 二、主张将卫星与地球作为两体系统对待的理由

讨论卫星发射过程中消耗的能量问题时，有人主张把卫星与地球作为两体系统对待，理由是发射卫星是在地面上进行的，卫星发射过程中火箭向后喷射出来的气体进入大气层，而大气也属于地球的一部分，因此可以把发射卫星的过程看作卫星与地球的相互作用过程，从而把卫星与地球简化为两体系统。由于卫星的质量 *m* 与地球质量 *M* 相比较实在太小，该系统的质心位置就在地心。发射前卫星在地面静止，发射后卫星首先在近地轨道绕地球飞行，速度为第一宇宙速度 *v*1 = 7.9 km/s，选择地心参考系，即质心系，两体系统增加的总动能即为 *E*k对质心 = *μu*2，其中折合质量 *μ* = ≈ *m*，相对速度 *u* = *v*1 – *v*ʹ，其中 *v*ʹ 为发射卫星所在地随地球自转的速度。

如果在地面上 A 点处发射一颗质量为 *m* 的近地轨道卫星，已知 A 点随地球自转的速度大小为 *v*A，那么发射过程消耗的能量，即作为两体系统的卫星和地球增加的总动能：

*E*k对质心 = *μu*2 = *m*（*v*1 – *v*A）2

## 三、卫星与地球不是两体系统的理由

所谓的两体系统，指的是直接发生相互作用的两个物体组成的系统，而发射卫星的过程，并不是卫星与地球直接相互作用的过程。卫星的发射是靠火箭向后喷射高温高压气体产生的反冲作用而完成的，火箭喷射出来的尾气进入大气中，再与大气相互作用。即使把尾气和大气都算作地球的一部分，卫星与地球也是一种间接的作用。

所谓的两体系统，是指两个质点组成的系统。质点间的相互作用过程，只考虑机械能的变化，而发射卫星的过程，所耗绝大部分的能量都转化成了内能，因此把卫星发射过程看作两体系统来讨论能量问题，是舍本逐末的。

为什么说火箭发射过程中，尾气带走的能量占消耗能量的绝大部分呢？

设火箭发射过程中的某时刻，火箭及未燃烧的燃料的总质量为 *m*，它的速度为 *v*，经过很短的一段时间 d*t* 向后喷出的气体质量为 d*m*，喷射气体离开火箭喷口时相对火箭的速度为 *v*相对，喷射质量为 d*m* 的气体后火箭速度增加了 d*v*，喷射过程系统的总动量守恒，有

（*m* − d*m*）d*v* + d*m*·*v*相对 = 0

由于 d*m* ≪ *m*，因此 *m* – d*m* ≈ *m*，上式即为 *m*·d*v* + d*m*·*v*相对 = 0。设火箭的初始质量（包括燃料）为 *m*0，全部喷射完毕后质量为 *m*，在 *v*相对 保持不变的情况下，火箭速度从 0 开始能达到的速度最大值 *v*max 可用积分求得，即 = − *v*相对 ，得到 *v*max = *v*相对 ln 。

上面这一段是想说明，满足动量守恒的相互作用的系统是火箭（包括前端携带的卫星）及向后喷出的尾气，而不是卫星与地球。在火箭每次喷出质量为 d*m* 的尾气的过程中，

系统增加的动能分配给前端的火箭及后端的尾气，而尾气分得的部分占了绝大多数，这是因为动能 *E*k = *mv*2 = *pv*，前后两部分的动量 *p* 的变化量相等，增加的动能之比等于它们质量的反比，即 Δ*E*k火箭∶Δ*E*k尾气 = d*m*∶*m*，由于 d*m* ≪ *m* ，因此喷出的尾气带走的动能远大于火箭前端所增加的动能。这种连续喷射的结果，使得火箭前端的卫星得到的动能只占火箭消耗的能量的很小一部分（这里只谈增加的机械能，而未涉及尾气直接带走的内能）。

火箭尾气带走的动能在后来与地球大气的相互作用中，最终都转化为内能散失掉了，如果把卫星与地球作为一个两体系统看待，只计算它们增加的动能，是没有意义的。

## 四、卫星发射过程中有关能量的一个悖论

前面已经讨论过，发射卫星的过程，把卫星与地球作为相互作用的两个质点并不合适，也没有实际意义。卫星发射过程是南火箭的前端与发射的尾气相互作用的结果，讨论火箭与尾气的总能量的变化是有实际意义的（设计火箭的工程师最需要解决的问题之一，就是发射一颗质量为 *m* 的卫星，需要携带多少燃料），但中学物理解决不了这么复杂的问题。我们所能解决的，只是求解发射一颗质量为 *m* 的卫星，至少需要对它做多少功，或者说这颗卫星增加的机械能是多少。

举一个例子：要从地面上 A 点（已知 A 点随地球自转的速度大小为 *v*A）处发射一颗质量为 *m* 的宇宙飞船，使它能脱离地球的引力而成为一颗人造行星，至少要对它做多少功？

解法 1 要使飞船能克服地球引力的束缚，至少需要具有第二宇宙速度耽（11.2 km/s），而要从地面上 A 点把卫星加速到 *v*2，至少要消耗的能量为

Δ*E*1 = *m*（*v*2 – *v*A）2 ①

解法 2 要使飞船能脱离地球引力束缚，至少需要的能量为

Δ*E* = [ 0 −（− ）] − *mv*A2

式中的第一项为需要增加的引力势能，第二项是卫星未发射前在 A 点随地球自转而具有的动能。第二宇宙速度就是根据第一项求出来的，即有 [ 0 −（− ）] = *mv*22，这样上式就变成

Δ*E*1 = *m*（*v*22 – *v*A2） ②

显然，①式和②式的结果不相等，如何解释？

一种解释是：①式是系统增加的总能量，而②式只是飞船增加的能量，因此①式所得的结果正确，由于动能是与参考系有关的物理量，因此②式所得的结果没有意义。这就产生了一个悖论：②式所得的结果 Δ*E*1 = *m*（*v*22 – *v*A2）= *m*（*v*2 – *v*A）（*v*2 + *v*A）大于①式所得的结果 Δ*E*1 = *m*（*v*2 – *v*A）2，就是说飞船增加的动能大于系统增加的动能，那么这个“系统”指的是准呢？不可能是指火箭的前部和尾气，只能是指飞船与地球，而飞船与地球组成的系统增加的动能小于飞船增加的动能，恐怕是难以自圆其说的。

另一种解释是：①式是在地面参考系中利用动能定理所得的结果，因为（*v*2 – *v*A）是飞船加速后相对地面 A 点的速度，但第二宇宙速度 *v*2 的得出却是以地心参考系根据引力势能的关系得出的，这中间变换了参考系，因此是不正确的。②式则是完全在地心参考系内进行的推导计算，因此②式的结果是正确的。

经典力学的基础是牛顿的三个运动定律，动量定理、动能定理等都是在它们的基础上推导得出的，它们都只在惯性参考系中成立，在讨论地面附近小范围内物体的运动及相互作用等问题时，地面参考系是近似程度很好的惯性参考系，而在研究卫星、飞船发射过程等空间范围较大、时间历程较长的过程时，地面参考系不再是惯性参考系，而地心参考系则是近似程度很好的惯性系，因此②式是正确的。