# 第二章 4 单摆

## 问题？

生活中经常可以看到悬挂起来的物体在竖直平面内往复运动。将一小球用细绳悬挂起来，把小球拉离最低点释放后，小球就会来回摆动。小球的摆动是否为简谐运动呢？



如果细线的长度不可改变，细线的质量与小球相比可以忽略，球的直径与线的长度相比也可以忽略，这样的装置就叫作**单摆**（simple pendulum）。单摆是实际摆的理想化模型。显然，单摆摆动时摆球在做振动，下面我们来研究单摆的运动情况。

研究单摆时还有一个条件：与小球受到的重力及绳的拉力相比，空气等对它的阻力可以忽略。

为了更好地满足这个条件，实验时我们总要尽量选择质量大、体积小的球和尽量细的线。

### 思考与讨论

用什么方法探究单摆的振动是否为简谐运动？

可以用两种不同方法来研究上述问题：一种方法是分析单摆的回复力，看其与位移是否成正比并且方向相反；另一种方法是分析单摆位移与时间的关系是否满足正弦关系。

下面我们采用第一种方法来分析。

## 单摆的回复力

如图 2.4–1，单摆摆长为 *l*、摆球质量为 *m*。将摆球拉离平衡位置 O 后释放，摆球沿圆弧做往复运动。当摆球沿圆弧运动到某一位置 P 时，摆线与竖直方向的夹角为 *θ*。此时摆球受到重力 G 和摆线拉力 *F*T 的作用。重力 *G* 沿圆弧切线方向的分力 *F* = *mg*sin *θ*，正是这个力充当回复力，迫使摆球回到平衡位置 O。

*l*

*m*

*F*1

*F*T

*F*

P

*O*

*θ*

图2.4–1 分析单摆的回复力

回复力 *F* 与小球从 O 点到 P 点的位移 *x* 并不成正比也不反向。但是，当摆角 *θ* 很小时，摆球运动的圆弧可以看成直线，可认为 *F* 指向平衡位置 O，与位移 *x* 反向。圆弧的长度可认为与摆球的位移 *x* 大小相等，即

sin *θ* ≈ *θ* = ≈

如果角 *θ* 很小，用弧度表示的 *θ* 与它的正弦 sin *θ* 近似相等。

因此，单摆振动的回复力 *F* 可表示为

*F* =－ *x*

式中负号表示回复力与位移的方向相反。对一个确定的单摆来说，摆球质量*m*和摆长*l*是一定的，可以用一个常量*k*表示，于是上式可以写成

*F* =－ *kx*

可见，单摆在摆角很小的情况下做简谐运动。

### 做一做

如图 2.4–2，细线下悬挂一个除去了柱塞的注射器，注射器内装上墨汁。当注射器摆动时，沿着垂直于摆动的方向匀速拖动木板，观察喷在木板上的墨汁图样。

图2.4– 观察墨汁图样

*O*′

*O*

## 单摆的周期

一条短绳系一个小球，它的振动周期较短。悬绳较长的秋千（图2.4–3），周期较长。单摆的周期与哪些因素有关？

图2.4–3 悬绳长度不同的秋千

下面我们通过实验来研究这个问题。

### 实验

**探究单摆周期与摆长之间的关系**

如图 2.4–4，在铁架台的横梁上固定两个单摆，按照以下几种情况，把它们拉起一定角度后同时释放，观察两摆的振动周期。

图2.4–4 研究单摆的振动周期

1．两摆的摆球质量、摆长相同，振幅不同（都在小偏角下）。

2．两摆的摆长、振幅相同，摆球质量不同。

3．两摆的振幅、摆球质量相同，摆长不同。

比较三种情况下两摆的周期，可以得出什么结论？

实验表明：单摆做简谐运动的周期与摆长有关，摆长越长，周期越大；单摆的周期与摆球质量和振幅无关。

单摆周期与摆长之间有什么定量的关系呢？

### 做一做

改变摆长*l*，测出对应的单摆周期*T*（在小偏角下）。根据你的实验数据，尝试在坐标纸上画出*T*–*l*图像或*T*–*l*2 图像。它们分别是什么曲线？你能根据图像判断单摆周期与摆长的关系吗？

为了找出单摆周期与摆长之间定量的关系，荷兰物理学家惠更斯进行了详尽的研究，发现单摆做简谐运动的周期 *T* 与摆长 *l* 的二次方根成正比，与重力加速度 *g* 的二次方根成反比，而与振幅、摆球质量无关。惠更斯确定了计算单摆周期的公式

*T* = 2π

惠更斯（Christiaan Huygens，1629—1695）

单摆周期公式的发现，为人类利用简谐运动定量计时提供了可能，并以此为基础发明了真正可持续运转的时钟。

## 科学漫步

**从日晷到原子钟**

在人类文明进步和科学技术发展的历史长河中，人类活动与时间测量的精度是密不可分的。很久很久以前，我们的祖先记录时间是利用天体的周期性运动。例如利用太阳和月亮相对自己的位置等来模糊地定义时间。

后来，人们从观察自然现象到逐渐发明了日晷、水钟、沙漏等人造计时装置，这标志着人造时钟开始出现（图 2.4–5）。

图2.4–5 日晷

当钟摆等可长时间周期性运动的振荡器出现后，人们把能产生确定的振荡频率的装置，作为时间频率标准，并以此为基础发明了真正可持续运转的时钟。

从 20 世纪 30 年代开始，随着晶体振荡器的发明，小型化、低能耗的石英晶体钟表代替了机械钟，广泛应用在电子计时器和其他各种计时领域。

20 世纪 40 年代开始，科学家们利用原子超精细结构跃迁能级具有非常稳定的跃迁频率这一特点，发展出比晶体钟更高精度的原子钟。

随着激光冷却原子技术的发展，利用激光冷却的原子制造的冷原子钟（图 2.4–6）使时间测量的精度进一步提高。到目前为止，地面上精度最高的冷原子喷泉钟已经达到每 3 亿年只有 1 s 的误差，更高精度的冷原子光钟也在快速发展中。

图2.4–6 我国制造的空间冷原子钟

近年来，科学家们将激光冷却原子技术与空间微重力环境相结合，有望在空间轨道上获得比地面上的线宽要窄一个数量级的原子钟谱线，从而进一步提高原子钟的精度，这将是原子钟发展史上又一个重大突破。

## 练习与应用

本节共 4 道习题，第 1 题和第 2 题巩固和强化学生对单摆周期公式的运用和理解。第 3 题和第 4 题考查和培养学生把公式和图像相相互转换的能力。

1．一个理想单摆，已知其周期为 *T*。如果由于某种原因（如转移到其他星球）自由落体加速度变为原来的 ，振幅变为原来的 ，摆长变为原来的 ，摆球的质量变为原来的 ，它的周期变为多少？

**参考解答**：*T*

2．周期是 2 s 的单摆叫秒摆，秒摆的摆长是多少？把一个地球上的秒摆拿到月球上去，已知月球上的自由落体加速度为 1.6 m/s2 ，它在月球上做 50 次全振动要用多少时间？

**参考解答**：摆长约为 1 m，50 次全振动约 250 s。

3．图 2.4–7 是两个单摆的振动图像。

图2.4–7

*t*/s

1

2

3

4

5

6

7

8

甲

乙

2

1

0

−1

−2

*x*/cm

（1）甲、乙两个摆的摆长之比是多少？

（2）以向右的方向作为摆球偏离平衡位置的位移的正方向，从 *t* = 0 起，乙第一次到达右方最大位移时，甲摆动到了什么位置？向什么方向运动？

**参考解答**：（1）1∶4；（2）甲处于平衡状态，此时正向左方移动。

4．一条细线下面挂着一个小球，让它自由摆动，画出它的振动图像如图 2.4–8 所示。

（1）请根据图中的数据计算出它的摆长。

（2）请根据图中的数据估算出它摆动的最大偏角。

1

0

2

4

−4

*t*/s

*x*/cm

图2.4–8

**参考解答**：（1）1 m；（2）2.3°

# 第 4 节 单摆 教学建议

## 1．教学目标

（1）知道单摆是一种理想化模型，理解单摆模型的条件，能将实际问题中的对象和过程转化为单摆模型。

（2）能通过理论推导，判定单摆小角度振动时的运动特点。

（3）在探究单摆的周期与摆长的定量关系时，能分析数据、发现规律、形成合理的结论，能用已有的物理知识解释相关现象。

（4）知道单摆周期与摆长、重力加速度的关系，能运用其解决相关实际问题。

## 2．教材分析和教学建议

在学习单摆之前，学生学习了简谐运动及其图像，简谐运动的振幅、周期、频率以及回复力和能量等内容，本节是简谐运动的应用实例。通过学习受力和运动情况均较为复杂的单摆，促进学生对简谐运动规律的进一步理解和应用，丰富学生的运动与相互作用观念。教材以“单摆的摆动是否为简谐运动？”作为问题启发学生思考，通过对单摆回复力的分析推导和“做一做”观察墨汁图样的实验，丰富了学生的学习经历和知识形成过程。通过对较为复杂的单摆的相关问题进行分析和推理，促进学生科学思维的发展。探究单摆周期与摆长的关系时，先用控制变量法定性研究，再用图像法处理数据获得定量结果，提升学生科学探究的能力。

本节教学的重点是对单摆运动规律和单摆周期公式的探究。单摆是简谐运动的典型模型之一，也是丰富学生运动与相互作用观的重要知识载体。本节的难点在于对单摆回复力的判定以及对小角度的近似处理，虽然教材在必修模块已渗透极限思维，但大部分学生对小角度的近似处理缺少经验，还会存在学习障碍。

### （1）问题引入

悬挂起来的物体在竖直平面内往复运动是生活中常见的情景，本节提出的问题“小球的摆动是否为简谐运动呢？”激发了学生对该现象进一步研究的动机。

单摆的受力和运动情况比弹簧振子复杂，所以研究单摆时，要注意理想化模型方法的运用是分层次的：首先将实际的摆纳入单摆模型，然后将单摆纳入简谐运动模型。教学中应该首先明确单摆是一种理想化的模型。教师要结合弹簧振子的模型建构过程，让学生对实际摆的主要部件——细线和小球进行理想化处理，通过讨论，领会教材中“细线的质量与小球的质量相比可以忽略，球的直径与线的长度相比也可以忽略”的含义，从而建构出单摆模型。其次，引导学生用动力学（分析单摆的回复力和位移是否成正比且方向相反）和运动学（分析单摆位移和时间的关系是否遵从正弦函数的规律）两种方法进行推理和验证。

### （2）单摆的回复力

第一，确定单摆摆动的平衡位置 O；第二，确定摆球重力 *G* 沿圆弧切线方向的分力 *F* = *mg*sin*θ* 就是迫使它回到平衡位置 O 的回复力；第三，将沿弧运动近似为沿弦运动，引入位移 *x*；第四，判断单摆的回复力 *F* 与摆球从 O 点到 P 点的位移 *x* 是否满足 *F* = − *kx*，以及在什么条件下会满足，最终确定单摆在摆角很小的情况下做简谐运动。推导过程要注意让学生理解曾摆做简谐运动的受力条件，并体会物理学中常用的近似方法。

通过理论推理得到结论后，教材安排了“做一做：观察墨汁图样实验”，由于在简谐运动时仔细研究过 *x*–*t* 图像，因此，这个实验的功能不是理解 *x*–*t* 图像，而是通过做这个实验，让学生观察到单摆振动的 *x*–*t* 图像与弹簧振子振动的 *x*–*t* 图像相同。从而从运动学方面说明单摆在摆角很小的情况下做简谐运动。

**教学片段**

**单摆的回复力**

教师提出问题：如图 2–3 所示，摆球静止在 O 点时，它受到几个力？这些力有什么关系？并要求学生判断：摆球如果沿圆弧往复运动，该点是否为其平衡位置？

如果将摆球拉离平衡位置 O，然后放手，摆球沿着圆弧往复运动。当摆球摆到圆弧上任意一点 P 时，引导学生对摆球进行受力分析，问：这时摆球所受的重力 *G* 和拉力 *F*T 是否为平衡力？迫使摆球回到平衡位置的回复力是什么力？给学生一定时间讨论和交流，并将他们的观点汇总。

学生甲：回复力是摆球所受的重力和绳对摆球的拉力的合力。

学生乙：回复力是摆球所受的重力沿圆弧切线方向的分力。

经过充分讨论后，教师总结：单摆振动的回复力是什么？关键是分清它与弹簧振子振动的区别。弹簧振子是在一条直线上做往复运动，它振动的加速度是由合力产生的。而单摆在一个圆弧上来回运动，摆球做圆周运动时需要向心力来改变摆球的运动方向，这个向心力就是重力 *G* 沿悬线方向的分力 *F*1 跟悬线的拉力 *F*T 的合力，它的方向指向圆心，它不改变摆球在弧线上运动的快慢，只改变摆球的运动方向。而重力的另一个分力 *F*，即重力沿圆弧切线方向的分力，改变摆球在弧线上运动的快慢，使摆球沿弧线在平衡住置两侧做往复运动。因此，在研究单摆振动的回复力时不需要考虑向心力，只考虑重力沿圆弧切线方向的分力 *F* 就可以了。故单摆振动的回复力 *F* = *mg*sin*θ*。

引导学生分析发现：回复力 *F* = *mg*sin*θ* 与摆球从 O 点到 P 点的位移并没有成正比也不反向。教师再次提问：是不是在某种特定的条件下，回复力 *F* 会满足 *F* = − *kx*？引导学生认识到当摆角 *θ* 很小时，摆球运动的圆弧可以看成直线，可认为 *F* 指向平衡位置 O，与位移 *x* 反向。同时展现小角度时，用弧度表示的 *θ* 与它的正弦值，如表 2–1 所示。

表 2–1 小角度时 *θ* 与 sin*θ* 的比较

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 摆角 *θ* | 弧度值 | 正弦值 | 差值 |
| 1° | 0.017 45 | 0.017 45 | 0.000 00 |
| 2° | 0.034 91 | 0.034 90 | 0.000 01 |
| 3° | 0.052 36 | 0.052 34 | 0.000 02 |
| 4° | 0.069 81 | 0.069 76 | 0.000 05 |
| 5° | 0.087 27 | 0.087 16 | 0.000 11 |
| 6° | 0.104 72 | 0.104 53 | 0.000 19 |
| 7° | 0.122 17 | 0. 121 87 | 0.000 30 |
| 8° | 0.139 63 | 0.139 17 | 0.000 46 |

在摆角很小的情况下，sin*θ* 的值可近似看作等于用弧度表示的 *θ* 值，而 *θ* 值可以通过弧长与半径之比求得，这时圆弧又可以近似地看成直线，则有

sin*θ* ≈ *θ* ≈ $\overparen{OP}$≈

可见，单摆振动的回复力 *F* 可表示为

*F* = − *x*

式中 *x* 就是摆球偏离平衡位置的位移，负号表示回复力与位移方向相反，*mg* 和 *l* 都是恒定的，可以用一个常量 *k* 表示，于是上式可以写成

*F* = − *kx*

因此，单摆在摆角很小情况下做简谐运动。

### （3）单摆的周期

为了研究单摆的周期与各种因素是否有关以及有怎样的关系，可以采用控制变量法，按照定性和定量相结合的方案进行研究。单摆周期公式可通过实验观察、设疑、释疑的方式引入，以培养学生研究问题的能力，并加深对公式物理意义的理解。首先提出单摆的周期可能与哪些因素有关，让学生自主猜想，再让学生考虑如何去获取证据验证这些猜想，并设计出验证的实验方案，从中体会研究的过程和方法。在设计方案时建议同步设计实验数据采集表格，把相关物理量有序呈现出来，便于学生对比总结。实验记录表格设计也是学生处理数据能力的体现，在设计表格过程中可以把实验的思路变得更清晰。

上述实验只能得出“摆长越长周期也越长”的定性结论，在“探究单摆周期与摆长之间的关系”的实验中，建议先让学生对单摆周期 *T* 与摆长 *l* 之间的可能关系进行猜测，根据猜测来定义坐标系的横、纵坐标，使得在这样的尘标系中作出的图像是一条直线。如果作出的图像确实是一条直线，说明猜测成立，便能形成结论；如果作出的图像不是一条直线，说明猜测不成立，应该根据图像的形状重新进行猜测，重新定义坐标，直到作出直线为止。由于单摆周期跟摆长的二次方根成正比，这为学生经历这种数据处理过程提供了条件，也让学生体会了图像在定量处理实验数据中的作用。

本部分教学内容侧重实验方案设计、数据分析及结论形成。在对单摆周期的定性研究中，不涉及周期的定量测量，只要通过观察来比较周期大小即可；在定量研究中，建议教师课前完成实验数据的采集，在课堂上直接给出实验数据，直接让学生处理数据，通过数据分析得出实验结论。单摆的安装、单摆周期测量及摆长测量等具体操作细节，建议安排在下节“实验：用单摆测量重力加速度”中进行专门的学习讨论。

**教学片段**

**探究单摆周期与摆长之间的关系**

单摆振动的快慢可以用周期来描述，让学生观察其摆动，思考并讨论以下问题。

问题 1．你推测单摆周期可能跟什么因素有关？

问题 2．如果想研究单摆周期 *T* 跟摆球质量 *m*、摆长 *l*、振幅 *A* 之间的关系，需要用什么方法进行研究？说说你的研究思路。

为帮助学生厘清实验思路，建议学生把控制变量法中涉及的物理量全部在表格中有序地呈现出来（表 2–2）。然后引导学生根据实验思路设计实验方案，并进行实验操作，把实验结果记录在表格中。要求学生整理表格中的实验数据，发现其中的规律，形成实验结论，并用证据进行解释交流。

表 2–2 用控制变量法研究 *T* 与 *m*、*l*、*A* 之间的关系

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 不变量 | 变量 | 单摆的周期 *T* |
| 摆球质量 *m*、摆长 *l* | 振幅 *A* 大 |  |
| 振幅 *A* 小 |  |
| 摆球质量 *m*、振幅 *A* | 摆长 *l* 大 |  |
| 摆长 *l* 小 |  |
| 振幅 *A*、摆长 *l* | 摆球质量 *m* 大 |  |
| 摆球质量 *m* 小 |  |

教师提供单摆振动周期 *T* 和摆长 *l* 的实验数据，引导学生用坐标纸绘制图像（也可用软件拟合图像）的办法去发现它们之间的定量关系，指导学生根据猜测来定义坐标系的横、纵坐标，然后判断描绘出来的图像是否为一条直线。

注意引导学生阅读本节教材后面的“科学漫步”，让学生列举各种计时器，然后在讨论中逐步认识到单摆的出现大大提升了计时的精度，从而体会物理知识在人类文明发展过程中的重要作用。

## 3．“练习与应用”参考答案与提示

本节共 4 道习题，第 1 题和第 2 题巩固和强化学生对单摆周期公式的运用和理解。第 3 题和第 4 题考查和培养学生把公式和图像相相互转换的能力。

1．*T*

2．摆长约为 1 m，50 次全振动约 250 s。

3．（1）1∶4；（2）甲处于平衡状态，此时正向左方移动。

4．（1）1 m；（2）2.3°