# 第六章 3 向心加速度

## 问题？

天宫二号空间实验室在轨飞行时，可认为它绕地球做匀速圆周运动。尽管线速度大小不变，但方向却时刻变化，因此，它运动的加速度一定不为 0。那么，该如何确定它在轨飞行时加速度的方向和大小呢？



## 匀速圆周运动的加速度方向

物体做匀速圆周运动时，所受合力提供向心力，合力的方向总是指向圆心，如图6.3–1 所示。根据牛顿第二定律，物体运动的加速度方向与它所受合力的方向相同。因此，物体做匀速圆周运动时的加速度总指向圆心，我们把它叫作**向心加速度**（centripetal acceleration）。

*a*

*O*

*v*

图 6.3–1 匀速圆周运动的加速度方向与线速度方向的关系

牛顿第二定律不仅适用于直线运动，对曲线运动同样适用。

我们知道，加速度是速度的变化率。在研究直线运动时，我们曾通过分析速度变化的情况，得出直线运动的加速度大小和方向。其实，在研究匀速圆周运动时，同样可以通过这种办法来确定加速度的方向。用运动学的方法求向心加速度的方向，在本节后的“拓展学习”中会涉及。

## 匀速圆周运动的加速度大小

上一节我们学习了向心力大小的表达式。根据牛顿第二定律 *F* = *ma* 和向心力表达式 *F*n = *m*，可得出向心加速度的大小

*a*n =

或

*a*n = *ω*2*r*

### 思考与讨论

从公式*a*n = 看，线速度一定时，向心加速度与圆周运动的半径成反比；从公式*a*n = *ω*2*r*看，角速度一定时，向心加速度与半径成正比。

自行车的大齿轮、小齿轮、后轮的半径不一样，它们的边缘有三个点*A*、*B*、*C*，如图6.3–2所示。其中哪两点向心加速度的关系适用于“向心加速度与半径成正比”，哪两点适用于“向心加速度与半径成反比”？给出解释。

*A*

*B*

*C*

图 6.3–2 自行车的大齿轮、小齿轮与后轮

### 【例题】

如图 6.3–3所示，在长为 *l* 的细绳下端拴一个质量为 *m* 的小球，捏住绳子的上端，使小球在水平面内做圆周运动，细绳就沿圆锥面旋转，这样就成了一个圆锥摆。当绳子跟竖直方向的夹角为 *θ* 时，小球运动的向心加速度 *a*n 的大小为多少？通过计算说明：要增大夹角 *θ*，应该增大小球运动的角速度 *ω*。

*θ*

*θ*

*l*

*m*

*r*

*F*

*O*

*G*

*F*n

图 6.3–3

**分析** 由于小球在水平面内做圆周运动，向心加速度的方向始终指向圆心。可以根据受力分析，求出向心力的大小，进而求出向心加速度的大小。根据向心加速度公式，分析小球做圆周运动的角速度 *ω* 与夹角 *θ* 之间的关系。

**解** 根据对小球的受力分析，可得小球的向心力

*F*n = *mg*tan*θ*

根据牛顿第二定律可得小球运动的向心加速度

*a*n = = *g*tan*θ* （1）

根据几何关系可知小球做圆周运动的半径

*r* = *l*sin*θ* （2）

把向心加速度公式 *a*n = *ω*2*r* 和（2）式代入（1）式，可得

cos*θ* =

从此式可以看出，当小球运动的角速度增大时，夹角也随之增大。因此，要增大夹角 *θ*，应该增大小球运动的角速度 *ω*。

## 拓展学习

**推导向心加速度公式**

*A*

*B*

*vB*

*O*

*vA*

乙

*vB*

*vA*

Δ*v*

*vB*

*vA*

Δ*v*

*A*

*B*

*O*

丙

*θ*

*θ*

*θ*

*θ*

*A*

*B*

*O*

丁

图 6.3–4 推导向心加速度

公式

*A*

*B*

*vB*

*O*

Δ*t*

*vA*

甲

下面用运动学的方法求做匀速圆周运动物体的向心加速度的方向与大小。

**向心加速度的方向**

如图6.3–4甲所示，一物体沿着圆周运动，在*A*、*B*两点的速度分别为*vA*、*vB*，可以分四步确定物体运动的加速度方向。

第一步，根据曲线运动的速度方向沿着切线方向，画出物体经过*A*、*B*两点时的速度方向，分别用*vA*、*vB*表示，如图甲所示。

第二步，平移*vA*至*B*点，如图乙所示。

第三步，根据矢量运算法则，做出物体由*A*点到*B*点的速度变化量Δ*v*，其方向由*vA*的箭头位置指向*vB*的箭头位置，如图丙所示。由于物体做匀速圆周运动，*vA*、*vB*的大小相等，所以，Δ*v*与*vA*、*vB*构成等腰三角形。

第四步，假设由A点到B点的时间极短，在匀速圆周运动的速度大小一定的情况下，A点到B点的距离将非常小，作出此时的Δ*v*，如图丁所示。

仔细观察图丁，可以发现，此时，Δ*v*与*vA*、*vB*都几乎垂直，因此Δ*v*的方向几乎沿着圆周的半径，指向圆心。由于加速度*a*与Δ*v*的方向是一致的，所以从运动学角度分析也可以发现：物体做匀速圆周运动时的加速度指向圆心。

**向心加速度的大小**

仔细观察图丁，还可以发现，当Δ*t*足够小时，*v*A、*v*B的夹角*θ*就足够小，*θ*角所对的弦和弧的长度就近似相等。因此，*θ* = ，在Δ*t*时间内，速度方向变化的角度*θ* = *ω*Δ*t*。由此可以求得

Δ*v* = *vω*Δ*t*

将此式代入加速度定义式*a* = ，并把*v* = *ωr*代入，可以导出向心加速度大小的表达式为

*a*n = *ω*2*r*

上式也可以写成

*a*n =

它与根据牛顿第二定律得到的结果是一致的。

## 练习与应用

本节共 4 道习题，第 1 题根据向心加速度的不同表达形式，理解向心加速度以及向心加速度公式中各物理量之间的相互关系。第 2 题和第 4 题让学生在熟悉的圆周运动情境中建构模型，进行科学推理。第 3 题研究实际皮带传动模型，练习选择恰当的公式解决简单的问题。

1．甲、乙两物体都在做匀速圆周运动，关于以下四种情况各举一个实际的例子。在这四种情况下，哪个物体的向心加速度比较大？

A．它们的线速度大小相等，乙的半径小

B．它们的周期相等，甲的半径大

C．它们的角速度相等，乙的线速度小

D．它们的线速度大小相等，在相同时间内甲与圆心的连线扫过的角度比乙的大

**【参考答案】**A．乙；B．甲；C．甲；D．甲

提示：甲、乙线速度相等时，利用 *a*n = ，半径小的向心加速度大。甲、乙周期相等时，利用 *a*n = *r*，半径大的向心加速度大。甲、乙角速度相等时，利用 *a*n = *vω*，线速度大的向心加速度大。甲、乙线速度相等时，利用 *a*n = *vω*，角速度大的向心加速度大。由于在相等时间内甲与圆心的连线扫过的角度比乙大，所以甲的角速度大，甲的向心加速度大。

2．月球绕地球公转的轨道接近圆，半径为3.84×105 km，公转周期是27.3 d。月球绕地球公转的向心加速度是多大？

**【参考答案】**2.7×10−3 m/s2

提示：月球公转周期 *T* = 27.3×24×3600 s = 2.36×106 s，月球公转的向心加速度 *a*n = *r* = （）2×3.84×108 m/s2 = 2.7×10−3 m/s2。

以月球公转为背景，练习用 *a*n = *r* 求解月球的向心加速度，计算量较大，为下一章的学习埋下伏笔，培养学生对太空探索的兴趣。

3．一部机器与电动机通过皮带连接，机器皮带轮的半径是电动机皮带轮半径的 3 倍（图 6.3–5），皮带与两轮之间不发生滑动。已知机器皮带轮边缘上一点的向心加速度为 0.10 m/s2。

图 6.3–5

*A*

机器皮带轮

电动机皮带轮

（1）电动机皮带轮与机器皮带轮的转速之比 *n*1∶*n*2 是多少？

（2）机器皮带轮上A点到转轴的距离为轮半径的一半，A 点的向心加速度是多少？

（3）电动机皮带轮边缘上某点的向心加速度是多少？

**【参考答案】**（1）3∶1；（2）0.05 m/s2；（3）0.3 m/s2

提示：（1）由于皮带与两轮之间不发生滑动，所以两轮边缘上各点的线速度大小相等。

设电动机皮带轮与机器皮带轮边缘上质点的线速度大小分别为 *v*1、*v*2，角速度大小分别为 *ω*1、*ω*2，边缘上质点运动的半径分别为 *r*1、*r*2，则 *v*1 = *v*2，*v*1 = *ω*1*r*1，*v*2 = *ω*2*r*2，又 *ω* = 2π*n*，所以 *n*1∶*n*2 = *ω*1∶*ω*2 = *r*1∶*r*2 = 3∶1。

（2）A 点的向心加速度 *a*nA = *ω*22×= 0.10×m/s2 = 0.05 m/s2。

（3）电动机皮带轮边绦上质点的向心加速度 *a*n = = × = 0.1×3 m/s2 = 0.3 m/s2。

皮带传动是教学中的一个难点，教学中要注意引导学生根据题设条件挖掘隐含条件，如同轴转动的角速度大小相等，同一皮带上各处的线速度大小相等。

4．A、B 两艘快艇在湖面上做匀速圆周运动，在相同的时间内，它们通过的路程之比是 4∶3，运动方向改变的角度之比是 3∶2，它们的向心加速度之比是多少？

**【参考答案】**2∶1

提示：A、B 两个快艇做匀速圆周运动，由于在相等时间内它们通过的路程之比是 4∶3，所以它们的线速度之比为 4∶3。由于它们在相等时间内运动方向改变的角度之比是 3∶2，所以它们的角速度之比为 3∶2。由于向心加速度 *a*n = *vω*，所以它们的向心加速度之比为 2∶1。

以快艇在湖面上做匀速圆周运动为背景，练习用以 *a*n = *vω* 求向心加速度，加深对线速度、角速度物理意义的理解。

# 第 3 节 向心加速度 教学建议

## 1．教学目标

（1）知道匀速圆周运动中向心加速度大小的表达式，理解向心加速度与半径的关系，并会用来进行简单的计算。

（2）了解分析匀速圆周运动速度变化量时用到的极限思想。

（3）能根据问题情景选择合适的向心加速度的表达式。

## 2．教材分析与教学建议

向心加速度是描述匀速圆周运动的又一重要概念，教材在“问题”栏目中，从运动和力的关系出发，确定做圆周运动的物体具有加速度。本节是前一节“向心力”的拓展，同时又是学好后一节“生活中的圆周运动”的前提，具有承上启下的作用。

本节的重点是向心加速度的方向和大小。教材从动力学角度出发，根据“从力推知加速度”的思路，在前一节确定的向心力方向和大小的基础上，得出向心加速度的方向和大小。这种叙述的好处是降低了教学的难度，使学生可以较容易地掌握向心加速度的概念。

教材在“拓展学习”栏目中根据加速度定义式推导向心加速度的方向和大小，在推理过程中渗透极限思想。这是为学有余力的学生开的“窗口”，并不是所有学生需要达到的要求。这种编写思路不仅体现了学习的层次性，也让学生经历多角度认识问题的思维过程，体验多角度分析问题的方法，有利于提升学生科学思维的素养。

### （1）匀速圆周运动的加速度方向

从动力学的角度得到向心加速度的方向难度并不大。从培养学生科学思维的角度，还可以引导他们从运动学角度分析向心加速度的方向。教材中这部分内容放在“拓展学习”栏目中，对于学有余力的学生，也可以在课堂上进行。

在从运动学角度学习向心加速度的概念时，学生可能会遇到来自三个方面的困难。①已有经验的阻碍作用。受直线运动中加速度概念的影响，学生会认为匀速圆周运动速度大小没有改变，没有加速度。②相关知识经验的不足。学生知道速度是矢量，但对不共线矢量减法运算的知识储备不足，对确定速度变化量的方向感到困难。③不理解近似、极限思想。对小角度时采用的近似、极限处理有很大困难。这就需要教师精心设计问题，并让学生进行充分的讨论。

**教学片段**

**探究匀速圆周运动加速度的方向**



图 6–12

问题 1．图 6–12 甲中的小球与图 6–12 乙中的运动员正在做匀速圆周运动，是否具有加速度？

问题 2．做匀速圆周运动的物体的加速度方向如何确定？你的依据是什么？

问题 3．除了用牛顿第二定律确定向心加速度的方向外，你还有什么方法可确定向心加速度的方向？

### （2）匀速圆周运动的加速度大小

**教学片段**

**探究匀速圆周运动的加速度大小**

问题 1．图 6–12 甲中的小球正以角速度 *ω* 做半径为 *r* 的匀速圆周运动，它的向心加速度大小是多少？

问题 2．计算向心加速度的公式除了 *a* = *ω*2*r* 外，还有其他表达式吗？

问题 3．根据 *a* = *ω*2*r* 与 *a* = ，请分析向心加速度与半径究竟是成正比，还是成反比？该如何理解这一问题？

问题 4．物体做变速圆周运动时，向心加速度的表达式 *a* = *ω*2*r* 与 *a* = 是否成立？为什么？

问题 5．我们可以从牛顿第二定律推导出向心加速度大小的表达式，是否还有其他方法？

从牛顿第二定律角度推导向心加速度的表达式是比较容易的。对于基础较好的学生，可以通过问题 5 启发他们，尝试自己推导。

**教学片段**

**运用向心加速度的公式解决实际问题**



图 6–13

问题 1．如图 6–13 甲所示，A、B、C 分别是大齿轮、小齿轮边缘上的点和后轮边缘上的点，当转动脚踏板时，这三点间的加速度大小如何比较？你选择公式的依据是什么？

问题 2．如图 6–13 乙所示，长为 *l* 的绳子拴有质量为 *m* 的小球，在同一水平面内做匀速圆周运动，绳与竖直线的夹角为 *θ*。小球的加速度方向指向哪里？

问题 3．小球受几个力的作用，是什么力提供了向心力？

问题 4．生活经验告诉我们，如果转动得快，绳与竖直线的夹角 *θ* 就大，你能够给出理论依据吗？

比较 A、B 两点的加速度时，考虑到链条的约束，两点的线速度大小相等，应选择 *a* = 进行比较，得 *a*A < *a*B。比较 B、C 两点的加速度时，考虑到是同轴转动，角速度相同，应选择 *a* = *ω*2*r* 进行比较，得 *a*B < *a*C，综合可得 *a*A < *a*B < *a*C。分析圆锥摆时，首先应进行运动和受力分析，建立圆周运动模型。明确圆周是哪个圆？圆心在哪？向心加速度方向如何？在此基础上，再明确什么力产生了向心加速度，最后再列式求解。

**教学片段**

**从运动学视角确定向心加速度的方向**

问题 1．如图 6–14 甲所示，物体做直线运动，初速度为 *v*1，末速度为 *v*2，如何用矢量图表示速度变化量？

问题 2．如图 6–14 乙所示，物体做曲线运动，初速度为 *v*1，末速度为 *v*2，如何用矢量图表示速度变化量？



图 6–14

问题 3．匀速圆周运动也是曲线运动，如何在图 6–15 甲中，作出质点从 A 点到 B 点速度变化量的矢量图呢？



图 6–15

问题 4．如果 A、B 两点之间是整数个圆周，则 Δ*v* 等于多少？如果 A、B 两点之间是半个圆周，则 Δ*v* 等于多少，方向如何？如果 A、B 两点之间是四分之一个圆周，则 Δ*v* 等于多少？其方向如何？

问题 5．如何确定图 6–15 乙中物体的加速度方向？

问题 1 主要是帮助学生回忆直线运动中如何表示速度的变化量。问题 2 以平抛运动为例，慢慢渗透矢量平移的思想。问题 3 是迁移问题 2 中所用的方法，将矢量平移运用到圆周运动中速度变化量的求法。问题 4 从几个特殊的位置看速度变化量，降低学生认识的台阶，遵循从特殊到一般的认知规律。问题 5 主要是渗透极限的思想，从运动学的角度解释为什么加速度的方向是指向圆心的。

## 3．“练习与应用”参考答案与提示

本节共 4 道习题，第 1 题根据向心加速度的不同表达形式，理解向心加速度以及向心加速度公式中各物理量之间的相互关系。第 2 题和第 4 题让学生在熟悉的圆周运动情境中建构模型，进行科学推理。第 3 题研究实际皮带传动模型，练习选择恰当的公式解决简单的问题。

1．A．乙；B．甲；C．甲；D．甲

提示：甲、乙线速度相等时，利用 *a*n = ，半径小的向心加速度大。甲、乙周期相等时，利用 *a*n = *r*，半径大的向心加速度大。甲、乙角速度相等时，利用 *a*n = *vω*，线速度大的向心加速度大。甲、乙线速度相等时，利用 *a*n = *vω*，角速度大的向心加速度大。由于在相等时间内甲与圆心的连线扫过的角度比乙大，所以甲的角速度大，甲的向心加速度大。

2．2.7×10−3 m/s2

提示：月球公转周期 *T* = 27.3×24×3600 s = 2.36×106 s，月球公转的向心加速度 *a*n = *r* = （）2×3.84×108 m/s2 = 2.7×10−3 m/s2。

以月球公转为背景，练习用 *a*n = *r* 求解月球的向心加速度，计算量较大，为下一章的学习埋下伏笔，培养学生对太空探索的兴趣。

3．（1）3∶1；（2）0.05 m/s2；（3）0.3 m/s2

提示：（1）由于皮带与两轮之间不发生滑动，所以两轮边缘上各点的线速度大小相等。

设电动机皮带轮与机器皮带轮边缘上质点的线速度大小分别为 *v*1、*v*2，角速度大小分别为 *ω*1、*ω*2，边缘上质点运动的半径分别为 *r*1、*r*2，则 *v*1 = *v*2，*v*1 = *ω*1*r*1，*v*2 = *ω*2*r*2，又 *ω* = 2π*n*，所以 *n*1∶*n*2 = *ω*1∶*ω*2 = *r*1∶*r*2 = 3∶1。

（2）A 点的向心加速度 *a*nA = *ω*22×= 0.10×m/s2 = 0.05 m/s2。

（3）电动机皮带轮边绦上质点的向心加速度 *a*n = = × = 0.1×3 m/s2 = 0.3 m/s2。

皮带传动是教学中的一个难点，教学中要注意引导学生根据题设条件挖掘隐含条件，如同轴转动的角速度大小相等，同一皮带上各处的线速度大小相等。

4．2∶1

提示：A、B 两个快艇做匀速圆周运动，由于在相等时间内它们通过的路程之比是 4∶3，所以它们的线速度之比为 4∶3。由于它们在相等时间内运动方向改变的角度之比是 3∶2，所以它们的角速度之比为 3∶2。由于向心加速度 *a*n = *vω*，所以它们的向心加速度之比为 2∶1。

以快艇在湖面上做匀速圆周运动为背景，练习用以 *a*n = *vω* 求向心加速度，加深对线速度、角速度物理意义的理解。