# 第八章 4 机械能守恒定律

## 问题

伽利略曾研究过小球在斜面上的运动。他发现 ：无论斜面 B 比斜面 A 陡些或缓些，小球的速度最后总会在斜面上的某点变为 0，这点距斜面底端的竖直高度与它出发时的高度基本相同。

*h*

*h*

A

B

在小球的运动过程中，有哪些物理量是变化的？哪些是不变的？你能找出不变的量吗？

## 追寻守恒量

能量对于科学研究和日常生活有着巨大的影响，但要用一句话说清楚能量究竟是什么却非易事。这也许是牛顿未能把“能量”这一概念留给我们的原因之一。但是在牛顿之前，我们就已经能在力学领域发现它的萌芽。

科学概念的力量在于它具有解释和概括一大类自然现象的能力。在这方面能量概念的作用十分突出。

如果不采用能量的概念，我们也可以利用以前的语言来描述伽利略的斜面实验。我们可以说，为了把小球从桌面提高到斜面上的某个位置，伽利略施加了与重力相反的力；当他释放小球时，重力使小球滚下斜面 A ；在斜面的底部，小球由于惯性而滚上斜面 B。

但是，这样的描述不能直接表达一个最重要的事实：如果空气阻力和摩擦力小到可以忽略，小球必将准确地终止于它开始运动时的高度，不会更高一点，也不会更低一点。这说明某种“东西”在小球运动的过程中是不变的。其实，伽利略已经走到了机械能守恒的大门口，只是当时还没有“能量”的概念，因此，伽利略没有得出机械能守恒的结论。

能量概念的引入是科学前辈们追寻守恒量的一个重要事例。

## 动能与势能的相互转化

物体沿光滑斜面滑下时，重力对物体做正功，物体的重力势能减少。减少的重力势能到哪里去了？

我们发现，在这个过程中，物体的速度增加了，表示物体的动能增加了。这说明，物体原来的重力势能转化成了动能。

具有一定速度的物体，由于惯性沿光滑斜面上升，这时重力对物体做负功，物体的速度减小，表示物体的动能减少了。但由于物体的高度增加，它的重力势能增加了。这说明，物体的动能转化成了重力势能。

竖直向上抛出一个物体，随着物体高度的增加，它的速度会减小；当物体到达最高点后会转而下降，同时速度逐渐增大。这一过程同样可以从动能和重力势能相互转化的角度来分析。

不仅重力势能可以与动能相互转化，弹性势能也可以与动能相互转化。例如，被压缩的弹簧具有弹性势能，当弹簧恢复原来形状时，就把跟它接触的物体弹出去。这一过程中，弹力做正功，弹簧的弹性势能减少，而物体得到一定的速度，动能增加。再如，运动员从跳板上弹起的过程中，跳板的弹性势能转化为运动员的动能（图 8.4–1），也是这样一种过程。

图 8.4–1 跳板跳水

重力势能、弹性势能与动能都是机械运动中的能量形式，统称为**机械能**（mechanical energy）。通过重力或弹力做功，机械能可以从一种形式转化成另一种形式。

## 思考与讨论

一个小球在真空中做自由落体运动，另一个同样的小球在黏性较大的液体中由静止开始下落（图 8.4–2）。它们都由高度为 *h*1 的地方下落到高度为 *h*2 的地方。在这两种情况下，重力做的功相等吗？重力势能的变化相等吗？动能的变化相等吗？重力势能各转化成什么形式的能？

*h*2

*h*1

真空

油

图 8.4–2 小球在真空和油中的下落

## 机械能守恒定律

动能与势能的相互转化是否存在某种定量的关系？

这里以动能与重力势能的相互转化为例，讨论这个问题。我们讨论物体沿光滑曲面滑下的情形。这种情形下，物体受到重力和曲面支持力的作用，因为支持力方向与运动方向垂直，支持力不做功，所以，只有重力做功。

在图 8.4–3 中，物体在某一时刻处在高度为 *h*1 的位置A，这时它的速度是 *v*1 。经过一段时间后，物体下落到高度为 *h*2 的另一位置 B，这时它的速度是 *v*2。用 *W* 表示这一过程中重力做的功。从动能定理知道，重力对物体做的功等于物体动能的增加，即

*W* ＝ *mv*22 − *mv*12

A

B

*h*2

*h*1

图 8.4–3物体沿光滑曲面滑下

另一方面，重力对物体做的功等于物体重力势能的减少，即

*W* ＝ *mgh*1 − *mgh*2

从以上两式可得

*mgh*1 − *mgh*2 ＝ *mv*22 − *mv*12

这就是说，重力做了多少功，就有多少重力势能转化为动能。把上式移项后得到

*mgh*2 + *mv*22＝*mgh*1 + *mv*12

等式左边为物体末状态动能与势能之和，等式右边为物体初状态动能与势能之和。

可见，在只有重力做功的系统内，动能与重力势能互相转化时总的机械能保持不变。

### 思考与讨论

在图 8.4–3 中，如果物体从位置 B 沿光滑曲面上升到位置 A，重力做负功。这种情况下上式的关系是否还成立？

同样可以证明，在只有弹力做功的系统内，动能和弹性势能互相转化时总的机械能也保持不变。**在只有重力或弹力做功的物体系统内，动能与势能可以互相转化，而总的机械能保持不变**。这叫作**机械能守恒定律**（law of conservation of mechanical energy）。它是力学中的一条重要定律，是普遍的能量守恒定律在力学范围内的表现形式。如图 8.4–4，滑雪者沿斜面下滑时，斜面的支持力与运动方向垂直，不做功；如果阻力做的功较少，可以忽略，则只有重力做功。此种情况下，动能与重力势能可以互相转化，总的机械能守恒。如果阻力做的功较大，不能忽略，则机械能不守恒。

图 8.4–4

### 【例题】

把一个小球用细线悬挂起来，就成为一个摆（图 8.4–5），摆长为 *l*，最大偏角为 *θ*。如果阻力可以忽略，小球运动到最低点时的速度大小是多少？

O

*θ*

*l*

A

C

图 8.4–5

**分析** 在阻力可以忽略的情况下，小球摆动过程中受重力和细线的拉力。细线的拉力与小球的运动方向垂直，不做功，所以这个过程中只有重力做功，机械能守恒。

小球在最高点只有重力势能，动能为 0，计算小球在最高点和最低点重力势能的差值，根据机械能守恒定律就能得出它在最低点的动能，从而算出它在最低点的速度。

**解** 以小球为研究对象。设最低点的重力势能为 0，以小球在最高点的状态作为初状态，以小球在最低点的状态作为末状态。在最高点的动能 *E*k1 ＝ 0，重力势能是

*E*p1 ＝ *mg*（*l* − *l* cos *θ*）

在最低点的重力势能 *E*p2 ＝ 0，而动能可以表示为

*E*k2 ＝ *mv*2

运动过程中只有重力做功，所以机械能守恒，即

*E*k2 + *E*p2 ＝ *E*k1 + *E*p1

把初末状态下动能、重力势能的表达式代入，得

*mv*2 ＝ *mg*（*l* − *l* cos *θ*）

由此解出小球运动到最低点时的速度大小

*v* ＝

从得到的表达式可以看出，初状态的 *θ* 角越大，cos *θ* 越小，（1 − cos *θ* ）就越大，*v* 也就越大。也就是说，最初把小球拉得越高，它到达最低点时的速度也就越大。这与生活经验是一致的。

从这个例题可以看出，如果研究对象在某一过程中满足机械能守恒的条件，应用机械能守恒定律解决问题只需考虑运动的初状态和末状态，不必考虑两个状态间过程的细节，这样就简化了计算。如果直接用牛顿定律解决问题，需要分析过程中各种力的作用，而这些力又往往在变化着。因此，一些难于用牛顿定律解决的问题，应用机械能守恒定律则有可能易于解决。

能量是人们研究物质世界非常重要的一个物理量，是物质运动的统一量度。物体运动虽然形式各异，但是每种运动都具有相应的能量。能量及其转化将各种运动统一、联系起来。

守恒定律不仅给处理问题带来方便，而且有更深刻的意义。物理世界是千变万化的，但是，人们发现有些物理量在一定条件下是守恒的，可以用这些“守恒量”来表示物理世界变化的规律，这就是守恒定律。机械能守恒定律就是其中一个。正因为自然界存在着“守恒量”，而且，某些守恒定律的适用范围很广，所以，在物理学中寻求“守恒量”已经成为物理学研究的一种重要思想方法。

## 练习与应用

1．在下面列举的各个实例中（除 A 外都不计空气阻力），哪些过程中机械能是守恒的？说明理由。

A．跳伞运动员带着张开的降落伞在空气中匀速下落

B．抛出的标枪在空中运动

C．拉着一个金属块使它沿光滑的斜面匀速上升

D．在光滑水平面上运动的小球碰到一个弹簧，把弹簧压缩后，又被弹回来

2．如图 8.4–6，质量为 *m* 的小球从光滑曲面上滑下。当它到达高度为 *h*1 的位置 A 时，速度的大小为 *v*1 ；当它继续滑下到高度为 *h*2 的位置 B 时，速度的大小为 *v*2 。在由高度 *h*1 滑到高度 *h*2 的过程中，重力做的功为 *W*。

A

B

*h*2

*h*1

*v*1

*v*2

图 8.4–6

（1）根据动能定理列出方程，描述小球在A、B 两点间动能的关系。

（2）根据重力做功与重力势能的关系，把以上方程变形，以反映出小球运动过程中机械能是守恒的。

3．质量为 0.5 kg 的石块从 10 m 高处以 30° 角斜向上方抛出（图 8.4–7），初速度 *v*0 的大小为 5 m/s。不计空气阻力，*g* 取 10 m/s2 。

*h*

30°

*v*0

图 8.4–7

（1）石块落地时的速度是多大？请用机械能守恒定律和动能定理分别讨论。

（2）石块落地时速度的大小与下列哪些量有关，与哪些量无关？说明理由。

A．石块的质量

B．石块的初速度

C．石块初速度的仰角

D．石块抛出时的高度

4．一条轻绳跨过定滑轮，绳的两端各系一个小球 A 和 B，B 球的质量是 A 球的 3 倍。用手托住 B 球，当轻绳刚好被拉紧时，B 球离地面的高度是 *h*，A 球静止于地面，如图 8.4–8所示。释放 B 球，当 B 球刚落地时，求 A 球的速度大小。定滑轮的质量及轮与轴间的摩擦均不计，重力加速度为 *g*。

*h*

B

A

图 8.4–8

5．把质量是 0.2 kg 的小球放在竖立的弹簧上，并把小球往下按至 A 的位置，如图 8.4–9甲所示。迅速松手后，弹簧把小球弹起，小球升至最高位置 C（图乙），途中经过位置 B 时弹簧正好处于自由状态。已知 B、A 的高度差为 0.1 m，C、B 的高度差为 0.2 m，弹簧的质量和空气的阻力均可忽略，*g* 取 10 m/s2。

A

B

甲

乙

C

图 8.4–9

（1）分别说出小球由位置 A 至位置 B、由位置 B 至位置 C 时，小球和弹簧的能量转化情况。

（2）小球处于位置 A 时，弹簧的弹性势能是多少？在位置 C 时，小球的动能是多少？

6．图 8.4–10 是某城市广场喷泉喷出水柱的场景。从远处看，喷泉喷出的水柱超过了 40 层楼的高度；靠近看，喷管的直径约为 10 cm。请你据此估计用于给喷管喷水的电动机输出功率至少有多大？

图 8.4–10

# 第 4 节 机械能守恒定律 教学建议

## 1．教学目标

（1）通过机械能守恒定律的学习，初步建立能量观念、体会守恒思想。

（2）会用能量观念分析具体实例中动能与势能（包括弹性势能）之间的相互转化。

（3）理解机械能守恒定律的推导过程。

（4）会从做功和能量转化的角度判断机械能是否守恒，能应用机械能守恒定律解决有关问题，体会利用机械能守恒定律解决问题的便利性。

## 2．教材分析与教学建议

从知识发展的线索来看，本节的教学内容是对前面几节内容的总结，也是对学习能量守恒定律所作的铺垫。本节内容将加深学生对功是能量转化的量度的理解，也为学生从能量角度处理力学问题提供了途径。

本节从伽利略斜面实验的讨论开始，在实验过程中分析变化量与不变量，在此基础上讨论动能与势能的相互转化。然后推理出机械能守恒定律，将推理过程与对机械能守恒条件的深入理解结合起来。

本节教学的重点与难点是：①促进学生对“功是能量转化的量度”的理解。②机械能守恒定律的推导和运用机械能守恒分析相关问题，③守恒条件的判断和机械能守恒定律的理解等。

教师应在教材内容的基础上，针对难点的突破进行教学设计。可以从以下几个方面展开教学。

### （1）追寻守恒量

学生在前面的学习中已经见过伽利略斜面实验。现在换个角度重新讨论，可以降低难度。另外，伽利略斜面实验也是探究机械能守恒定律的典型案例。在该典型案例的分析与讨论中，要充分展开学生的思维过程。目的是对学生进行方法和观念的培养，使学生理解守恒思想的重要性，并希望学生在今后的学习中用这样的方法和观念去认识问题。

能量转化与守恒定律虽然是适合各个领域的普遍关系，但考虑学生的基础，教学内容宜限定在学生比较容易理解和接受的机械能范围。教师教学时可围绕以下几个方面展开：①举例说明生活中的一些守恒关系。②分析伽利略理想斜面实验，了解动能、势能及其转化。③让学生认识到守恒思想是物理学研究的重要方法。

### （2）动能与势能的相互转化

动能与势能概念比较抽象，应通过实例分析的方法，说明动能和势能之间可以相互转化。这样就把抽象的内容具体化、形象化了。教学中，要有意识地补充实验视频等素材，帮助学生借助形象思维有效地完成思维活动。通过实例的分析，使学生了解势能和动能相互转化的定性关系，知遒一种能量减少，必然导致另一种能量的增加。最后提出动能和势能转化有什么定量关系，让学生进行讨论与交流并提出猜想，调动学生的积极性，加强师生的互动性。

**教学片段**

**动能与势能的相互转化**

在粉笔头下落的过程中，重力势能和动能都有变化，自然界中动能和势能变化的事例很多，下面我们共同观察这类现象，并思考动能和势能的变化。

实验 1：滚摆实验。

出示滚摆，并简单介绍滚摆的构造及实验的做法。事先应在摆轮的侧面某处涂上鲜明的颜色标志，告诉学生观察颜色标志，可以判断摆轮转动的快慢。

引导学生复述并分析实验中观察到的现象。开始释放摆轮时，摆轮在最高点静止，此时摆轮只有重力势能，没有动能。摆轮下降时其高度降低，重力势能减少。摆轮旋转着下降，而且越转越快，其动能越来越大。摆轮到最低点时，转动最快，动能最大，其高度最低，重力势能最小。在摆轮下降的过程中，它的重力势能逐渐转化为动能。仿照摆轮下降过程的分析，得出摆轮在上升过程中，摆轮的动能逐渐转化为重力势能。

实验 2：单摆实验。

此实验摆绳宜长些，摆球宜重些。最好能挂在天花板上，使单摆在黑板前平行于黑板振动，以便在黑板上记录摆球运动路线中左、右最高点和最低点的位置。分析单摆实验时，摆球高度的变化比较直观，而判断摆球速度大小的变化比较困难。可以从摆球在最高点前后远动方向的不同分析摆球运动到最高点时的速度为 0，作为这一难点的突破口。

综述实验 1、2，说明动能和重力势能是可以相互转化的。之所以能够相互转化是因为物体受到重力的作用，是重力做功的结果。

实验 3：弹性势能和动能的相互转化。

实验可分两步做。首先手持着小球将弹簧片推弯，而后突然释放小球，小球在弹簧片的作用下在水平槽内运动。在此过程中，弹性势能转化为动能。第二步实验，让小球从斜槽上端滚下，让学生观察小球碰击弹簧片的过程。然后分析动能转化为弹性势能和弹性势能转化为动能的过程。得出：动能和弹性势能也是可以相互转化的，之所以能够相互转化是因为弹簧弹力的作用，是弹簧弹力做功的结果。

自然界中动能和势能相互转化的事例很多。其中有一些比较直观，例如，物体从高处落下、瀑布流水等，这些都能说明动能和势能的转化。有些事例比较复杂，例如，踢出去的足球在空中沿一条曲线（抛物线）运动时，动能和势能是如何转化的呢？（画足球轨迹，依图分析）首先可分析足球离地面的高度的变化，这是判断足球重力势能变化的依据。在上升过程中足球的重力势能增加，在下降过程中足球的重力势能减少。接着再分析足球的速度。足球在最高点时不再上升，说明它不能再向上运动。所以，足球在上升过程中，速度逐渐变小，在下降过程中速度又逐渐变大。通过以上分析，可以看到足球在上升阶段动能转化为重力势能，在下降阶段重力势能转化为动能。

### （3）机械能守恒定律

要有意识地通过分析，让学生明白机械能守恒定律的成立是有条件的。如教材中思考与讨论：一个小球在真空中做自由落体运动，另一个同样的小球在黏性较大的液体中由静止开始下落（图 8–7）。它们都由高度为 *h*1 的地方下落到高度为 *h*2 的地方。在这两种情况下，重力做的功相等吗？重力势能的变化相等吗？动能的变化相等吗？重力势能各转化成什么形式的能？前者由于只有重力做功，机械能守恒。后者机械能尽管不守恒，但能量的总量也是保持不变的。从而使学生领悟到机械能既不可能凭空产生，也不会无缘无故消失，机械能的增减是除了重力和弹簧弹力以外的力做功的必然结果。

*h*2

*h*1

真空

油

图 8–7

守恒定律不仅给处理问题带来方便，而且有更深刻的意义。世界是千变万化的，但人们发现有些物理量在一定条件下是守恒的，机械能就是其中之一。所以在物理学中寻求“守恒量”已经成为研究工作的一个重要方面。

关于机械能守恒定律的推导，除了教材中提供的物体沿光滑曲面下滑的场景外，教学中还可以分析物体做竖直上抛运动及平抛运动时的受力情况、做功情况及能量转化情况，并做进一步归纳总结。在只有重力做功的情况下，不论物体做直线运动还是曲线运动（如竖直上抛运动、平抛等），物体的机械能总量保持不变。

对于只有弹簧弹力做功情况下的机械能守恒，仅通过举例定性说明。例如，在光滑的水平面上，放开一根被压缩的弹簧，它可以把跟它接触的小球弹出去，这时弹簧的弹力做功，弹簧的弹性势能转化为小球的动能。在弹性势能和动能的相互转化中，如果只有弹力做功，动能和弹性势能之和保持不变，即机械能守恒。

在分析运用机械能守恒定律求解的例题时，教师首先要引导学生通过受力分析和运动分析展示清晰的物理情景，其次要抓住机械能守恒的条件进行分析判断，最后在满足守恒条件的情况下，运用机械能守恒定律列式求解。如果不满足，则运用动能定理或牛顿运动定律去分析求解。在此基础上，教师要引导学生对牛顿运动定律、动能定理和机械能守恒定律的解题思路进行比较，更好地理解机械能守恒定律。

## 3．“练习与应用”参考答案与提示

本节共 6 道习题，主要围绕机械能守恒的条件和机械能守恒定律的应用展开，目的是帮助学生掌握用机械能守恒定律解决问题的基本方法，领悟用机械能守恒定律解决问题的优越性。第 1 题通过生活中的各种实例，加深理解机械能守恒的条件。第 2 题帮助学生揭示规律之间的联系和区别，弄清楚物理规律的来龙去脉。第 3 题帮助学生认识到对于做曲线运动的物体系统，有时从能量的角度入手往往会简便的多。第 4 题使学生的认识由单个物体（实际上是该物体和地球组成的系统）机械能守恒的表达式过渡到多个物体机械能守恒的表达式。第 5 题通过实例培养学生善于根据物理过程的发生、发展和变化过程进行物理情景展示的能力，使学生认识到展示清楚物理情景是解题的关键，根据物理情景和物理条件来选择相应的物理规律解题是处理物理问题的基本原则。第 6 题通过联系实际让学生体验物理学在生活生产中的应用，培养学生应用物理知识分析解决问题的能力，使学生在运用微元法处理具体模型的过程中提升学科素养。

1．A 中除重力外还有空气阻力做功，机械能不守恒。

B 中只有重力做功，机械能守恒。

C 中支持力不做功，但除重力外还有拉力做功，机械能不守恒。

D 中只有弹簧的弹力对小球做功，小球和弹簧组成的系统机械能守恒。

提示：通过在具体物理现象中判断机械能是否守恒，加深对机械能守恒条件的认识。

2．（1）小球在从 A 点下落至 B 点的过程中，只有重力做功，曲面的支持力与速度方向垂直，不做功。根据动能定理有 *mg*（*h*1 – *h*2）= *mv*22 − *mv*12。

（2）小球在从 A 点下落至 B 点的过程中，只有重力做功，由重力做功与动能变化的关系 *mg*（*h*1 – *h*2）= *mv*22 − *mv*12 可得 *mgh*1 + *mv*12 = *mgh*2 + *mv*22。等式左边表示物体在 A 点时的机械能，等式右边表示物体在 B 点时的机械能，小球从 A 点运动到 B 点的过程中，机械能守恒。

3．（1）石块从抛出到落地的过程中，只有重力做功，所以机械能守恒。设地面为零势能面，落地时的速度为 *v*t，根据机械能守恒定律有 *mv*02 + *mgh* = *mv*t2，*v*t = = m/s = 15 m/s。

若根据动能定理可得 *mgh* = *mv*t2 − *mv*02，*v*t = = 15 m/s。

（2）由 *v*t = 可知，石块落地时速度的大小与石块初速度大小和石块抛出时的高度有关，与石块的质量和石块初速度的仰角无关。

提示：练习分别应用动能定理和机械能守恒定律解决实际问题，并通过函数表达式讨论物理量之间的关系，让学生感受守恒定律不仅给处理问题带来方便，而且在一定条件下可以用这些“守恒量”来表示物理世界变化的规律。

4．

提示：设 A 球的质量为 *m*，以 A 球、B 球和轻绳组成的系统为研究对象，根据机械能守恒定律有 3*mgh* – *mgh* = （*m* + 3*m*）*v*2，解得 *v* = 。

对 A 球由动能定理可得 *W*T – *mgh* = *mv*2，对 B 球由动能定理可得 3*mgh* − *W*T = （3*m*）*v*2，然后得到系统机械能守恒的表达式 3*mgh* – *mgh* = （*m* + 3*m*）*v*2，，然后进行求解。

5．（1）小球从位置 A 至位置 C 的过程开始阶段，弹性势能逐渐减少，动能和重力势能逐渐增大，当弹簧对小球向上的弹力大小与小球所受重力大小相等时，小球动能最大。之后，弹性势能继续减小，动能开始减小，重力势能逐浙增大。当弹簧恢复到自然长度时，弹性势能为 0，之后，重力势能仍然逐渐增大，动能逐渐减小，到达 C 点时，动能减少到 0，重力势能达到最大。

（2）小球从位置 A 运动到位置 C 的过程中，机械能守恒。故在位置 A，弹簧的弹性势能 *E*p = *mg*（*h*AB + *h*AC）= 0.2×10×（0.1 + 0.2）J = 0.6 J。小球在最高点 C 的速度为 0，故小球在位置 C 的动能为 0。

提示：以竖立弹簧模型为情景，通过小球合力的变化分析速度大小的变化，通过速度大小的变化分析动能的变化，通过高度的变化分析重力势能的变化，通过弹簧形变量的变化分析弹性势能的变化，通过机械能守恒分析小球的动能、势能和弹簧弹性势能之间的相互转化，以进一步理解相关的物理概念和规律，培养学生根据物理情景和物理条件选择相应的物理规律分析问题的良好思维习惯。

6．4.6×105 W

提示：每层楼按 3 m 计算，对质量为 *m* 的水，设喷射速度为 *v*，从离开喷口至最高点的过程中，由机械能守恒定律得 *mgh* = *mv*2，由此解得 *v* = ≈ 49 m/s。

在喷管喷水口处，设经过 Δ*t* 的时间喷出水的质量为 Δ*m*，那么 Δ*m* = *ρ*π（）2*v*Δ*t*，Δ*t* 时间内电动机做功转化为水的动能 *P*Δ*t* = Δ*mv*2。计算得 *P* = 4.6×105 W。

通过喷泉喷出水柱的场景让学生体验物理学在生活中的应用，通过小水柱竖直上抛运动求抛出时的初速度，再利用微元法处理小水柱 Δ*m* 从电动机做功转化为水的动能，以培养学生的建模能力。