# 第23届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、

建造一条能通向太空的天梯，是人们长期的梦想。当今在美国宇航局（NASA）支持下，洛斯阿拉莫斯国家实验室的科学家已在进行这方面的研究。一种简单的设计是把天梯看作一条长度达千万层楼高的质量均匀分布的缆绳，它由一种高强度、很轻的纳米碳管制成，由传统的太空飞船运到太空上，然后慢慢垂到地球表面。最后达到这样的状态和位置：天梯本身呈直线状；其上端指向太空，下端刚与地面接触但与地面之间无相互作用；整个天梯相对于地球静止不动。如果只考虑地球对天梯的万有引力，试求此天梯的长度。已知地球半径*R*0＝6.37×106m，地球表面处的重力加速度*g*＝9.80m·s-2。

二、

如图所示，一内半径为*R*的圆筒（图中2*R*为其内直径）位于水平地面上。筒内放一矩形物。矩形物中的A、B是两根长度相等、质量皆为*m*的细圆棍，它们平行地固连在一质量可以不计的，长为*l*＝*R*的矩形薄片的两端。初始时矩形物位于水平位置且处于静止状态，A、B皆与圆筒内表面接触。已知A、B与圆筒内表面间的静摩擦因数*μ*都等于1。

*l*

A

2*R*

现令圆筒绕其中心轴线非常缓慢地转动，使A逐渐升高。

1．矩形物转过多大角度后，它开始与圆筒之间不再能保持相对静止？

答：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_（只要求写出数值，不要求写出推导过程）

2．如果矩形物与圆筒之间刚不能保持相对静止时，立即令圆筒停止转动。令*θ*表示A的中点和B的中点的连线与竖直线之间的夹角，求此后*θ*等于多少度时，B相对于圆筒开始滑动。（要求在卷面上写出必要的推导过程。最后用计算器对方程式进行数值求解，最终结果要求写出三位数字。）

三、

由于地球的自转及不同高度处的大气对太阳辐射吸收的差异，静止的大气中不同高度处气体的温度、密度都是不同的。对于干燥的静止空气，在离地面的高度小于20 km的大气层内，大气温度*T*e随高度的增大而降低，已知其变化率

＝－6.0×10-3K·m-1

*z*为竖直向上的坐标。

现考查大气层中的一质量一定的微小空气团（在确定它在空间的位置时可当作质点处理），取其初始位置为坐标原点（*z*＝0），这时气团的温度*T*、密度*ρ*、压强*p*都分别与周围大气的温度*T*e、密度*ρ*e、压强*p*e相等。由于某种原因，该微气团发生向上的小位移。因为大气的压强随高度的增加而减小，微气团在向上移动的过程中，其体积要膨胀，温度要变化（温度随高度变化可视为线性的）。由于过程进行得不是非常快，微气团内气体的压强已来得及随时调整到与周围大气的压强相等，但尚来不及与周围大气发生热交换，因而可以把过程视为绝热过程。现假定大气可视为理想气体，理想气体在绝热过程中，其压强*p*与体积*V*满足绝热过程方程*pV*γ＝*C*。式中*C*和*γ*都是常量，但*γ*与气体种类有关，对空气，*γ*＝1.40。已知空气的摩尔质量*μ*＝0.029 kg·mol-1，普适气体恒量*R*＝8.31 J·（K·mol）-1。试在上述条件下定量讨论微气团以后的运动。

设重力加速度*g*＝9.8 m·s-2，*z*＝0处大气的温度*T*e0＝300 K。

四、

图1中K为带电粒子发射源，从中可持续不断地射出质量、电荷都相同的带正电的粒子流，它们的速度方向都沿图中虚线O′O，速度的大小具有一切可能值但都是有限的。当粒子打在垂直于O′O的屏NN′上时，会在屏上留下永久性的痕迹。屏内有一与虚线垂直的坐标轴*Y*，其原点位于屏与虚线的交点O处，*Y*的正方向由O指向N。虚线上的A、B两处，各有一电子阀门a和b。阀门可以根据指令开启或关闭。开始时两阀门都处于关闭状态，挡住粒子流。M、M′是两块较大的平行金属平板，到虚线O′O的距离都是*d*，板M接地。在两板间加上如图2所示的周期为2*T*的交变电压*u*，*u*的正向最大值为2*U*，负向最大值为*U*。已知当带电粒子处在两平板间的空间时，若两平板间的电压为*U*，则粒子在电场作用下的加速度*a*、电压*u*的半周期*T*和平板到虚线的距离*d*满足以下关系

*aT*2＝*d*

已知AB间的距离、B到金属板左端的距离、金属板的长度以及金属板右端到屏的距离都是*l*。不计重力的作用。不计带电粒子间的相互作用。打开阀门上的粒子被阀门吸收，不会影响以后带电粒子的运动。只考虑MM′之间的电场并把它视为匀强电场。

K

O′

M′

N ′

N

*Y*

*O*

M

B

A

a

b

*l*

*l*

*l*

*l*

图1

*t* / *T*

0

2 4 6 8 10 12

*u*

2*U*

－*U*

图2

1．假定阀门从开启到关闭经历的时间*δ*比*T*小得多，可忽略不计。现在某时刻突然开启阀门a又立即关闭；经过时间*T*，再次开启阀门a又立即关闭；再经过时间*T*，第3次开启阀门a同时开启阀门b，立即同时关闭a、b。若以开启阀门b的时刻作为图2中*t*＝0的时刻，则屏上可能出现的粒子痕迹的*Y*坐标（只要写出结果，不必写出计算过程）为\_\_\_\_\_\_\_。

2．假定阀门从开启到关闭经历的时间*δ*＝ ，现在某时刻突然开启阀门a，经过时间*δ*立即关闭a；从刚开启a的时刻起，经过时间*T*，突然开启阀门b，经过时间*δ*关闭b。若以刚开启阀门b的时刻作为图2中*t*＝0的时刻，则从B处射出的具有最大速率的粒子射到屏上所产生的痕迹的*Y*坐标（只要写出结果，不必写出计算过程）为\_\_\_\_\_\_\_\_\_。具有最小速率的粒子射到屏上所产生的痕迹的*Y*坐标（只要写出结果，不必写出计算过程）为\_\_\_\_\_\_。

五、

如图所示，坐标系*Oxyz*的*x*轴和*z*轴都位于纸面内，*y*轴垂直纸面向里。两无限大金属极板P和Q分别位于*x*＝－*d*和*x*＝*d*处。磁感应强度大小为*B*的匀强磁场的方向平行于*Oxz*坐标平面，与*z*轴的夹角为*α*。在坐标原点*O*处，有一电荷为*q*（＞0）、质量为*m*的带电粒子，以沿*y*轴正方向的初速度*v*0开始运动。不计重力作用。

2*d*

P

*z*

*B*

Q

*O*

*x*

*α*

1．若两极板间未加电场，欲使该粒子在空间上恰好能到达极板（但与板不接触），则初速度*v*0应为多大？所需最短时间*t*0是多少？

2．若在两极板间沿*x*轴正方向加上一场强为*E*的匀强电场，使该粒子能在第1问中所求得的时间*t*0到达极板，则该粒子的初速度*v*0应为多大？若*α*＝ ，求粒子到达极板时粒子的坐标。

六、

在高能物理中，实验证明，在实验室参考系中，一个运动的质子与一个静止的质子相碰时，碰后可能再产生一个质子和一个反质子，即总共存在三个质子和一个反质子。试求发生这一情况时，碰前那个运动质子的能量（对实验室参考系）的最小值（即阈值）是多少。

已知质子和反质子的静止质量都是*m*0＝1.67×10-27kg。不考虑粒子间的静电作用。

# 第23届全国中学生物理竞赛决赛参考解答

一、

要使天梯相对于地球静止不动，由地面伸向太空，与地面之间无相互作用力，这样的天梯的下端只能位于赤道上某处，且天梯与该处地球表面垂直，并与地球同步转动。如图1所示。

*L*

*R*1

*R*0

*O*

图1

从坐标原点与地球中心固连、坐标轴指向恒星的惯性参考系来看，天梯和地球一起匀速转动。天梯所受的外力只有地球的万有引力。把天梯看作是由线密度为*ρ*的许多非常小的小段组成，则每小段到地球中心的距离不同，因而所受地球引力的大小也不同，其中与地心的距离为*ri*－1 到*ri* 间的长度为△*ri* 的小段所受地球引力为

*f i*＝*G*  （1）

整个天梯所受的地球引力*F*就等于每小段所受地球引力之和，

即

*F*＝＝ （2）

符号表示对所有小段求和。因△*ri*＝*ri* －*ri*－1 是个小量，注意到*riri*－1＝*ri*（ *ri* －△*ri* ） ≈*r* ，因此

 

用*R*0表示地球半径，也就是天梯下端到地心的距离，*Rl* 表示天梯上端到地心的距离，则*r*0＝*R*0 ，*rn*＝*Rl*，代入（2）式得

*F*＝*GMρ*（ － ）  （3）

整个天梯的质量

*m*＝*ρ* （ *Rl* －*R*0 ）  （4）

天梯的质心位于天梯的中点，它到地心的距离

*rC*＝*R*0＋ （5）

根据质心运动定理，有

*F*＝*mrC* （ ）2  （6）

式中*T*为地球自转的周期。

由（3）、（4）、（5）、（6）式可得

（ *Rl* －*R*0 ）（ *R*＋*R*0*Rl* － ）＝0

 *Rl* －*R*0＝0 ，表示天梯无长度，不符合题意，符合题意的天梯长度满足的方程为

*R*＋*R*0*Rl* － ＝0 （7）

因为*GM*＝*Rg* ，所以得

*R*＋*R*0*Rl* － ＝0 （8）

【从跟随地球一起转动的参考系看，也可得到（8）式。这时，天梯在地球引力和惯性离心力的作用下，处于平衡静止状态，地球引力仍为（3）式，天梯所受的惯性离心力可由下面的方法求得：仍把天梯看作由很多长度为△*ri*的小段组成，则第*i*小段受的惯性离心力为

*f i*′＝*ρ*△*ri*（ ）2 *ri* （4′）

对所有小段求和，就得到整个天梯所受的惯性离心力

*F* ′＝＝（ ）2 *ri*△*ri*  （5′）

（5′）式中所示的和可以用图2过原点的直线*y*＝*ρ*（ ）2 *r*下的一个带阴影的梯形面积来表示，即

*O R*0 *Rl*

*r*

*y*

*ρ*( )2 *Rl*

*ρ*( )2 *R*0

图2

*F* ′＝*ρ*（ ）2 （ *Rl* －*R*0 ） （6′）

因为地球引力与惯性离心力平衡，由（3）式和（6′）式可得

*GM* （ － ） ＝（ ）2（ *Rl* －*R*0 ） （7′）

因为*GM*＝*Rg* ，化简（7′）式最后也能得到（8）式。】

解（8）式得

*Rl*＝ （9）

根号前取正号，代入有关数据，注意到*T*＝8.64 ×104 s ，得

*Rl*＝1.50 ×108 m （10）

所以天梯的长度

*L*＝*Rl*－*R*0＝1.44×108m （11）

二、

1．90°。

2．当矩形物处于竖直位置即*θ*＝0° 时，*B*不会滑动，矩形物静止。当圆筒缓慢转动使*θ*刚超过0° 时，*A*将离开圆筒内表面而开始倾倒，按题意此时圆筒已停止转动。假定*B*仍不动，此后，*A*在竖直平面内从静止开始绕*B*做圆周运动。圆周运动的径向方程（牛顿第二定律）为

 *m* ＝*mg*cos*θ*－*T*  （1）

这里*v* 表示*A*的速度。*T*是刚性薄片对*A*的作用力，规定其方向从*B*到*A*为正。根据能量守恒，有

 *mgl* （1－cos*θ* ）＝*mv*2 （2）

联立（1）、（2）式，得

 *T*＝*mg* （ 3cos*θ*－2 ） （3）

120°

30°

*O*

*A*

*B*

*θ*

如果令 *T*＝0 ，可得

*θ*＝arccos （ ）＝48.2°

显见，*θ* ＜ 48.2° 时，作用力是径向正向，对*A*是推力；*θ* ＞ 48.2° 时，作用力是径向反向，对*A*是拉力。

现在再来看前面被假定不动的*B*是否运动。我们可以在*B*处画圆筒内表面的切面，它与水平面成30° 夹角。因为假定*B*不动，其加速度为零，所以*B*在垂直于切面方向的受力方程为

*f*⊥－*mg*cos30°－*T*cos （ 30°－*θ* ）＝0 （4）

这里*f*⊥ 是圆筒内壁对*B*的支持力。由（4）式和（3）式可以论证，如果在*θ*等于60°（*A* 将与圆筒相碰）之前*B*不动，则*f*⊥ 必将始终不等于零，这就是说，在*B*开始滑动以前，*B*不会离开筒壁。*B*对筒壁的正压力是*f*⊥ 的反作用力，大小和*f*⊥ 相同。式中的*T*是刚性薄片对*B*的作用力，它和（1）式中的*T*大小相等（因薄片质量不计）。由于*μ* ＝1，所以最大静摩擦力*f*max 的大小就等于正压力。

*f*max＝*μf*⊥＝*mg*cos30°＋*T*cos （ 30°－*θ* ） （5）

其方向是沿切面方向。沿切面方向除摩擦力外，*B*还受到其他力

*f*∥＝*mg*sin30°＋*T*sin （ 30°－*θ* ） （6）

只要*f*∥ 不大于最大静摩擦力，*B*就不滑动。这个条件写出来就是

*f*∥ ≤ *f*max （7）

*B*滑动与否的临界点就应由*f*∥＝*f*max 求出，即

*mg*cos30°＋*T*cos （ 30°－*θ* ）＝*mg*sin30°＋*T*sin （ 30°－*θ* ） （8）

将（3）式的*T*代入（8）式，化简后得方程

（ 3cos*θ* －2 ）[ cos*θ*＋（ 2＋）sin*θ* ]＋1＝0 （9）

这个方程可用数值求解，即取不同的*θ*值代入逐步逼近，最后可得

*θ*＝54.9° （10）

*θ*超过此值，*B*将开始滑动。

三、

设微气团中空气的质量为*m* ，当其位移为*z*时，气团的体积为*V* ，气团内气体的密度为*ρ* ，气团周围大气的密度为*ρ*e 。气团受到竖直向下的重力 *mg*＝*Vρg* 和竖直向上的浮力*Vρ*e *g*作用，若气团的加速度为*α* ，则由牛顿第二定律有

*mα*＝－*Vρg*＋*Vρ*e *g*＝－*V*（ *ρ*－*ρ*e ） *g* （1）

或有

*α*＝－*g*  （2）

根据理想气体状态方程

 *pV*＝*RT* （3）

可知气体的密度

*ρ*＝＝ （4）

利用（4）式，注意到*p*＝*p*e ，（2）式可化成

*α*＝－*g*  （5）

周围大气在*z*处的温度*T*e 等于*z*＝0处的温度*T*e0 加从0到*z*温度的增量，即

*T*e＝*T*e0＋*z* （6）

若气团中气体温度随高度的变化率为 ，根据题意，有

*T*＝*T*0＋*z* （7）

*T*0为气团位于初始位置时气团中气体的温度。根据题意*T*e0＝*T*0 ，把（6）、（7）式代入（5）式得

*α*＝－ （ － ） *z* （8）

在（8）式中，若（ － ） ＞0 ，则加速度方向向下，作用于气团的力有使气团回到初始位置的趋势，这样，大气层中的大气就处于稳定状态；反之，气团将远离其初始位置，大气层中的大气处在不稳定状态。因周围大气温度随高度的变化率是已知的，故只要知道气团中气体温度随高度的变化率，便可对气团的运动作出判断。

大气的压强随高度的增加而减小，在高度为*z* 和*z* ＋△*z*处的压强差

△*p*e＝－*ρ*e*g*△*z* （9）

式中*ρ*e为*z*处的空气的密度，与温度、压强有关，由（4）式表示。

式中负号表示高度增加时，大气压强是减小的。把（4）式代入（9）式得

△*p*e＝－ *g*△*z* （10）

质量为*m* 的气团在上升过程中，其压强将随周围大气的压强的减小而减小，体积要增大，气团对周围空气做功。因为过程是绝热的，气团的内能要减少，因而温度要降低，温度、压强的变化应满足绝热过程的规律。试题给出的绝热过程方程是关于压强与体积间的关系，利用理想气体状态方程，可把绝热过程方程表示为温度与压强间的关系。

由（3）式得

*V*＝ （11）

把（11）式代入

*pVγ*＝*C*

得

*T*＝** （12）

当气团的压强由*p* 变到 *p*＋△*p*时，气团的温度将由*T*变到*T* ＋△*T* 。由（12）式

*T* ＋△*T*＝** （ *p*＋△*p* ）**

利用二项式定理，忽略△*p*的高次方项，并注意到（12）式得

*T* ＋△*T*＝** [**＋ ** （△*p* ） ]＝*T*＋ △*p*

故有

△*T*＝ △*p* （13）

根据题意，*p*＝*p*e ，△*p*＝△*p*e ，由（7）式、（10）式和（13）式得

＝－ （14）

已知＝－6.0×10-3K·m-1，代入有关数据可求得

 ＝9.8 × 10－3 K·m－1

当*z*不是很大时，有

*T*e0 ＋（＋ ） *z* ≈*T*e0

故有

＝－（15）

代入题给的有关数据得

＝－9.8 × 10－3 K·m－1（16）

负号表示高度增加时，气团的温度要下降。可见（ －）＞0，作用于气团的合力的方向与气团位移的方向相反，指向气团的初始位置，气团发生向上位移后，将要回到初始位置。当*z*不是很大时，（8）式中的*T*e可以用*T*e0代替，可知气团将在初始位置附近做简谐振动。振动的圆频率

*ω*＝ （17）

代入数据，得

*ω*＝1.1×10-2s-1 （18）

四、

1．*Y*1＝－0.3*d*，*Y*2＝0.9*d*。

2．*Y*′＝－0.138*d*，*Y*″＝－0.138*d*。

附参考解法：

1。当阀门*a*第1次开启时，具有各种速率的粒子（称之为第一批粒子）从*A*处进入*AB*之间，在*a*第2次开启时刻，第一批粒子中速率为

 *v*1＝ （1）

的粒子正好射到*B*处，被阀门*b*挡住。与此同时，第二批具有各种速率的粒子从*A*处进入*AB*之间。在阀门*a*第3次开启的时刻，第一批进入*AB*间的粒子中速率为

 *v*2＝＝*v*1 （2）

的粒子与第二批进入*AB*间的粒子中速率为*v*1的粒子同时到达*B*处。因此时阀门*b*已开启，这些粒子都从*B*处沿虚线射向两平行板，而第三批进入*AB*间的粒子在它们到达*B*处时，被*b*挡住。由此可知，能从*B*处射向两平行板的粒子具有*v*1和*v*2两种不同的速率。

根据题意，粒子从*B*处射出的时刻为*t*＝0 ，故速率为*v*1的粒子在时刻

 *t*1＝＝*T*

进入两平行板之间，由本题图2可知，两板间的电压

 *u*＝－*U*

粒子在两板间的电场作用下的加速度为－*a* ，粒子通过两板经历的时间为

 △*t*1＝＝*T*

在△*t*1时间内粒子在*Y*方向获得的分速度和位移分别为

 *v*1*y*＝－*a*△*t*1＝－*aT* （3）

 *y*1＝－*a* （△*t*1 ）2＝－*aT*2 （4）

因*aT*2＝*d* ，故| *y*1 |＝*d* ＜ *d* ，表明速率为*v*1的粒子能穿出平板，粒子穿出平板后做匀速运动。在从射出平板至射到屏的时间内，粒子在*Y*方向的位移

 △*y*1＝*v*1*y*＝－*aT*2 （5）

粒子在屏上产生的痕迹的*Y*坐标为

*Y*1＝*y*1 ＋△*y*1＝－*aT*2 －*aT*2＝－*aT*2＝－0.3*d* （6）

速率为*v*2 的粒子在时刻

 *t*2＝＝2*T*

进入两平行板之间，由本题图2可知，两板间的电压

 *u*＝2*U*

粒子在电场作用下的加速度为2*a* ，粒子通过两板经历的时间为

 △*t*2＝＝2*T*

因为两板间的电压在时间△*t*2内由2*U*变为－*U*，粒子的加速度亦将从2*a*变成－*a* ，由此可求得在△*t*2时间内粒子在*Y*方向获得的分速度和位移分别为

 *v*2*y*＝2*aT* － *aT*＝*aT* （7）

 *y*2＝（ 2*a* ）*T* 2 ＋（ 2*aT* ）*T*－*aT* 2＝*aT* 2 （8）

因*aT*2＝*d* ，故 *y*2＝*d* ＜ *d* ，表明速率为*v*2的粒子亦能穿出平板。粒子穿出平板后做匀速运动。在从射出平板至射到屏的时间内，粒子在*Y*方向的位移

 △*y*2＝*v*2*y*＝2*aT*2 （9）

粒子打在屏上产生的痕迹的*Y*坐标为

*Y*2＝*y*2 ＋△*y*2＝*aT*2＋2*aT*2＝*aT*2＝0.9*d* （10）

即粒子在屏上产生的痕迹是两个点，它们的*Y*坐标分别为*Y*1和*Y*2 。

2。由于阀门从开启到关闭要经历一段时间，在阀门*a*开启到关闭经历的*δ*时间间隔内的不同时刻，都有各种不同速率的粒子从*A*处进入*AB*间，有的早进入，有的晚进入。由于阀门*b*从开启到关闭也要经历一段时间*δ* ，粒子可能在最早的时刻即*t*＝0的时刻从*B*处射出，也可能在最晚的时刻即*t*＝*δ*时刻从*B*处射出。在*a*刚开启的时刻从*A*处射入*AB*间，并在*t*＝*δ*时刻从*B*处射出的粒子的速率最小，这最小速率为

*v*min＝（11）

在阀门*a*刚要关闭时刻从*A*处射进*AB*间，并在*t*＝0的时刻从*B*处射出的粒子的速率最大，这最大速率为

*v*max＝（12）

在*t*＝0时刻从*B*处射出的速率为*v*max的粒子在时刻

*t*1＝＝*T* － *δ*

进入两平板之间，在时刻

*t*1′＝*t*1＋＝2*T* －2*δ*

离开两平板。由本题图2可知，在*T* － *δ*到*T*时间内，两板间的电压为2*U* ，在*T*到2*T*－2*δ*时间内，两板间的电压为－*U* ，与电压对应的粒子的加速度分别为2*a*和－*a* 。在粒子通过平板的时间内，粒子在*Y*方向获得的分速度和位移分别为

 *v*1*y*＝2*aδ* － *a* （*T* － 2*δ* ）＝－*aT*＋4*aδ* （13）

 *y*1＝（ 2*a* ） *δ*2 ＋（ 2*a* ） *δ* （*T* － 2*δ* ）－*a* （*T* － 2*δ* ）2

＝ － *aT* 2＋4*aδT* － 5*aδ*2  （14）

粒子穿出平板后做匀速运动。从射出平板至射到屏的时间内，粒子在*Y*方向的位移

 △*y*1＝*v*1*y*＝（－*aT*＋4*aδ* ） （*T* －*δ* ）

＝ －*aT*2＋5*aδT* － 4*aδ*2  （15）

粒子在屏上产生的痕迹的*Y*坐标为

*Y*1＝*y*1 ＋△*y*1＝－ *aT*2 ＋9*aTδ* －9*aδ*2  （16）

根据题意，代入数据得

*Y*1＝－0.138*d* （17）

在*t*＝*δ*时刻从*B*处射出的速度为*v*min的粒子在时刻

*t*2＝*δ*＋＝*T*＋2*δ*

进入两平板之间，在时刻

*t*2′＝*t*2＋＝2*T*＋3*δ*

离开两平板。由本题图2可知，在*T*＋2*δ*到2*T*时间内，两板间的电压为－*U* ，在2*T*到2*T*＋3*δ*时间内，两板间的电压为2*U* ，与电压对应的粒子的加速度分别为－*a*和2*a* 。在粒子通过平板的时间内，粒子在*Y*方向获得的分速度和位移分别为

 *v*2*y*＝－ *a* （*T* － 2*δ* ）＋（ 2*a* ）3*δ*＝－*aT*＋8*aδ* （18）

 *y*2＝－*a* （*T* － 2*δ* ）2 －*a* （*T* － 2*δ* ） 3*δ*＋（ 2*a* ） （ 3*δ* ） 2

 ＝－ *aT* 2 － *aTδ*＋13*aδ*2  （19）

粒子穿出平板后做匀速运动。在从射出平板至射到屏的时间内，粒子在*Y*方向的位移

 △*y*2＝*v*2*y*＝（－*aT*＋8*aδ* ） （*T*＋*δ* ）

＝ －*aT*2＋7*aTδ*＋8*aδ*2  （20）

粒子在屏上产生的痕迹的*Y*坐标为

*Y*2＝*y*2 ＋△*y*2＝－ *aT*2 ＋6*aTδ*＋21*aδ*2  （21）

根据题意，代入数据得

*Y*2＝－0.138*d* （22）

由以上分析可知，速率最小和速率最大的粒子打在屏上产生的痕迹是位于*Y*轴上的同一点。

五、

**解法一**

1．平行板间仅有磁场，带电粒子初速度*v*0的方向垂直于磁场，在洛伦兹力的作用下，粒子将在垂直于磁场方向的平面内做匀速圆周运动，圆周半径

*R*0＝ （1）

轨道平面与*Oxz*坐标平面的交线如图1中*NN* ′ 所示。要使粒子刚能到达极板*Q*（与板刚未接触），圆心*C*应是*ON* ′ 的中点，有

2*d*

*P*

*z*

*B*

*Q*

*O*

*x*

*α*

*C*

*α*

图1

*N*

*N* ′

*CN* ′＝*R*0＝ （2）

由（1）、（2）式得

*v*0＝ （3）

粒子由*O*经过半个圆周到达*N* ′ ，所经历的最短时间为圆周运动的半个周期

*t*0＝＝ （4）

2．以*y*轴为旋转轴，顺时针转动*α*角，建立新坐标系*Ox*′*y*′*z*′ ，如图2所示。在新坐标系中电场强度*E*的分量为

*z*

*z*′

*B*

*y* ，*y*′

*x*′

*O*

*α*

图2

*E*

*v*0

*α*

*Ex* ′＝*E*cos*α Ey* ′＝0 *Ez* ′＝*E*sin*α*  （5）

磁感应强度*B*的分量为

*Bx* ′＝0 *By* ′＝0 *Bz* ′＝*B*  （6）

带电粒子所受到的电场力的分量为

*fEx* ′＝*qEx* ′＝*qE*cos*α fEy* ′＝0 *fEz* ′＝*qEz* ′＝*qE*sin*α*  （7）

当带电粒子速度为*v* 时，带电粒子所受到磁场力的分量为

*fBx* ′＝*qvy′B fBy* ′＝－*qvx* ′*B* *fBz* ′＝0 （8）

（i）关于带电粒子在*Ox*′*y*′ 平面内的分运动

现设想起始时刻带电粒子沿*y*′ 轴正方向的初速度*v*0用下式表示

*v*0＝*v*0＋*v*1－*v*1＝ *v*2－*v*1

式中

*v*2＝*v*0＋*v*1    （9）

现把*v*0看成沿*y*′ 轴负方向运动的速度*v*1和沿*y*′ 轴正方向运动的*v*2的合成。这样，与前者联系的运动使带电粒子受到沿*x*′ 轴的负方向的磁场力作用，它与电场力的分量*fEx* ′ 的方向相反，当*v*1取数值

*v*1＝ ＝cos*α*  （10）

时，与－*v*1相联系的磁场力与*fEx* ′ 的合力为零，其效果是带电粒子沿*y*′ 轴负方向以速度*v*1做匀速运动；与后者联系的运动使带电粒子仅受到磁场力作用，此力的方向既垂直于磁场方向（*z*′ 轴方向），又垂直于速度*v*2 ，即位于*Ox*′*y*′ 平面内，其大小为

*fx* ′*y*′＝*qv*2*B* （11）

粒子在此力作用下在平面内做速度为*v*2的匀速圆周运动，圆周的半径

*R*＝ （12）

其圆频率

*ω*＝*B* （13）

由以上分析可知带电粒子一方面在*Ox*′*y*′ 平面内做上述匀速圆周运动，另一方面圆心沿*y*′ 轴负方向以速度*v*1＝ cos*α*做匀速直线运动。

图3

*y*′

*O*

*x*′

*ωt*

*v*2

（ii）关于粒子沿*z* ′ 轴的分运动

由（7）、（8）两式可知，粒子在*z* ′ 方向仅受电场力作用，其加速度

*az*′ ＝＝sin*α* （14）

即粒子沿着*z* ′ 轴以加速度*az* ′ 做匀加速直线运动。

（iii）关于粒子在*Ox*′*y*′*z*′ 坐标系中的运动方程

在只考虑圆周运动的情况下，粒子的坐标随时间变的关系为

*x*′＝*R* （ 1－cos*ωt* ） （15）

*y*′＝*R* sin*ωt*  （16）

*z*′＝0 （17）

考虑了圆心运动及粒子沿*z* ′ 轴的运动并注意到（9）、（10）、（12）式，在*Ox*′*y*′*z*′ 坐标系中，粒子的运动方程为

*x*′＝ （ 1－cos*ωt* ）＝（ ＋ ） （ 1－cos*ωt* ） （18）

*y*′＝*R*sin*ωt* － *v*1*t*＝（ ＋ ） sin*ωt* － *t* （19）

*z*′＝ *t*2 （20）

（iv）粒子在*Oxyz*坐标系中的运动方程

利用坐标变换

*x*＝*x*′cos*α*＋*z*′sin*α*

*y*＝*y*′

*z*＝－*x*′sin*α*＋*z*′cos*α*

并注意到（5）、（9）、（10）、（13）各式，可将（18）、（19）、（20）式转换至*Oxyz*坐标系，得到粒子在*Oxyz*坐标系中的运动方程式为

*x*＝ （ *v*0cos*α*＋） （ 1－cos*Bt* ）＋ *t*2 （21）

*y*＝ （ *v*0＋）sin*Bt* － *t* （22）

*z*＝－ （ *v*0sin*α*＋） （ 1－cos*Bt* ）＋*t*2 （23）

根据题意，将*x*＝*d*和*t*＝*t*0＝＝ 代（21）式，解得

*v*0＝  （24）

将*α*＝ ，*t*＝*t*0＝＝ 和（24）式代入（21）、（22）、（23）各式，可得粒子到达极板*Q*时粒子的坐标为

*x*＝*d*   （25）

*y*＝－   （26）

*z*＝－*d*＋   （27）

**解法二**

1。与解法一相同。

2。以*y*轴为旋转轴，顺时针转动*α*角，建立新坐标系*Ox*′*y*′*z*′ ，设粒子速度在坐标系*Ox*′*y*′*z*′ 中分量分别为*vx* ′、*vy* ′、*vz* ′，牛顿第二定律的三个分量形式为

*m* ＝*qEx* ′＋*qvy* ′*B* （1）

*m* ＝－*qvx* ′ *B* （2）

*m* ＝*qEz′* （3）

将（2）式表示为

＝－

两边积分后得

*vy* ′＝－（ ）*x*′＋*C*1

*C*1为待定常量，当*t*＝0时，*x*′＝0 ，*vy* ′＝*v*0 ，故求得*C*1＝*v*0 ，上式应表为

*vy* ′＝－ *Bx*′＋*v*0 （4）

将（4）式代入（1）式，得

*m* ＝*qEx* ′ ＋*q* （－ *x*′＋*v*0 ）*B*

＝－（ ）2 *x*′＋（ ）2（ ＋ ） （5）

令

*R*＝（ ＋ ） （6）

*ω*＝*B* （7）

*X* ′＝*x*′－*R* （8）

（5）式可表为

＝－*ω*2*X* ′  （9）

这是简谐运动方程，其解为

*X* ′＝*A*cos （ *ωt*＋*θ* ） （10）

由（8）式得

*x*′＝*A*cos （ *ωt*＋*θ* ）＋*R* （11）

＝*vx* ′ ＝－*ωA*sin （ *ωt*＋*θ* ） （12）

利用初始条件，由（11）与（12）式，得

－*R*＝*A*cos*θ*

0＝－*ωA*sin*θ*

解得

*θ*＝0 （13）

*A*＝－*R*

再由（6）式，得

*A*＝－（ ＋ ） （14）

代入（11）式

*x*′＝（ ＋ ） （ 1－cos*ωt* ） （15）

将（12）式代入（2）式，整理后得

＝*ω*2*A*sin*ωt*

对上式积分，考虑初始条件，得

*vy* ′ ＝＝－*ωA*cos*ωt* － （16）

积分（16）式，考虑初始条件及（14）式，得

*y*′＝（ ＋ ） sin*ωt*－ *t* （17）

对（3）式积分可得

*z*′＝*t*2 （18）

（15）、（17）、（18）式分别与解法一中的（18）、（19）、（20）式相同，接下去的讨论与解法一相同。

**解法三**

设粒子速度在*Oxyz* 坐标中分量分别为*vx* 、*vy* 、*vz* ，牛顿第二定律的三个分量方程为

*m* ＝*qEx*＋*qvy Bz* （1）

*m* ＝－*qvxBz*＋*qvzBx* （2）

*m* ＝－*qBx vy* （3）

令

*ω*＝ （4）

*v*1＝cos*α* （5）

方程变为如下形式

＝*ωvy* cos*α*＋  （6）

＝－*ωvx* cos*α*＋*ωvz* sin*α* （7）

＝－*ωvy* sin*α*  （8）

对（6）、（8）两式积分，利用初始条件*t*＝0时，*vx*＝0 ，*x*＝0 ，*y*＝0 ，得

*vx*＝*ωy*cos*α*＋*ω* （ ）*t*  （9）

*vz*＝－*ωy*sin*α*  （10）

将（9）、（10）两式代入（7）式，得

＝－*ω*2*y*－*ω*2*v*1*t*＝－*ω*2 （ *y*＋*v*1*t* ）

令

*Y*＝*y*＋*v*1*t*  （11）

得

＝－*ω*2*Y*  （12）

其解为

*Y*＝*A*cos （ *ωt*＋*θ* ）

由（11）式可得

*y*＝*A*cos （ *ωt*＋*θ* ）－*v*1*t* （13）

由（13）式得

*vy*＝－*Aω*sin （ *ωt*＋*θ* ）－*v*1 （14）

由初始条件*t*＝0时，*vy*＝*v*0 ，*y*＝0 ，得

*A*cos*θ*＝0

*v*0 ＝－*Aω*sin*θ*－*v*1

解得

*θ*＝ *A*＝－  （15）

由（15）式，注意到（4）式、（5）式，得

*y*＝ （ *v*0＋ ） sin*Bt*－*t*  （16）

*vy*＝（ *v*0＋ ） cos*Bt*－ （17）

把（17）式代入（1）式，经积分并利用初始条件，可得

 *x*＝ （ *v*0cos*α*＋ ） （ 1－cos*Bt* ）＋ *t*2（18）

将（17）式代入（8）式，经积分并利用初始条件，得

*z*＝－ （ *v*0sin*α*＋ ） （ 1－cos*Bt* ）＋*t*2（19）

（18）、（16）、（19）式分别与解法一中的（21）、（22）、（23）式相同，接下去的讨论与解法一相同。

六、

在讨论本题之前，先看一下相对论能量和动量的普遍关系式，即

（ *mc*2）2＝*c*2*p*2＋*m*02*c*4 （1）

式中*c*为光在真空中的速度，*m*为粒子的质量，*p*为其动量，*m*0为静止质量。

【此关系式可由能量

*E*＝*mc*2

和动量

*p*＝*mv*＝

导出，*v*为粒子的速度。

*E* 2 －*c*2*p*2＝－*c*2

＝ *m*02*c*4 ＝*m*02*c*4

故 *E* 2＝*c*2*p*2＋*m*02*c*4 】

由此关系式可知，对每一个粒子，其能量的平方与*p*2 成线性关系。

**解法**

从实验室参考系来看，碰前系统的总动量等于运动的那个质子的动量，设其方向沿*x* 轴正方向，碰撞前后系统的总动量守恒，总能量守恒。若要碰后能存在三个质子和一个反质子且总能量为最小值，则可论证这四个粒子的动量必定相等。

1。先讨论碰后四个粒子的动量都沿*x* 轴正方向的情况。

令*p*1 、*p*2 、*p*3 、*p*4分别表示它们动量的大小，这四个动量中，若有任何两个不相等，如*p*1 ≠*p*2 ，设*p*1 ＜ *p*2 ，则若将*p*1增加△*p*（△*p*＜ *p*2 －*p*1）而将*p*2减少△*p*（这时总动量不变），则有

（ *p*1 ＋△*p* ）2－*p*12＝2*p*1△*p*＋（△*p* ）2

*p*22－（ *p*2 －△*p* ）2＝2*p*2△*p*－（△*p* ）2

这样一来，第一个粒子能量的平方增加了*c*2[ 2*p*1△*p*＋（△*p* ）2 ]，而第二个粒子能量的平方减少了*c*2[ 2*p*2△*p*－ （△*p* ）2 ]，两个粒子能量平方的净增量为

*c*2[ 2*p*1△*p*＋（△*p* ）2 ]－*c*2[ 2*p*2△*p*－ （△*p* ）2 ]

＝ *c*2[ 2△*p*（ *p*1－*p*2＋△*p* ） ]

因已设*p*1 ＜ *p*2 ，且△*p*＜ *p*2 －*p*1 ，所以净增量是负的，总能量将减少。这就是说，设*p*1 ≠*p*2时对应的总能量并不是最小值。由此可判断，四个粒子的动量必相等。

2．若四个粒子中，有一个粒子其动量*p*1沿*x*轴的负方向，因为总动量守恒，则必有沿*x*轴正方向运动的另一粒子的动量增加了*p*1 ，因为能量的平方与*p*2成线性关系，所以这时的总能量必然大于*p*1沿*x*轴正方向运动时的能量。也就是说，只要四个粒子中，有沿*x*轴负方向运动的，则总能量必不是最小值。

3．若四个粒子的动量的方向不在同一直线上，这时将它们沿*x*轴方向和垂直于*x*轴方向分解，沿*x*轴方向总动量守恒；垂直于*x*轴方向的动量互相抵消，但它们却使粒子的能量增大了，也就是说，这时的能量也不是最小值。

总结以上可见，要想碰后四个粒子的总能量最小，根据总动量守恒、能量守恒及相对论能量和动量关系式可知，碰后四个粒子的动量必相等。

设碰前运动质子的动量为*p* ，质量为*m* ，碰后四个粒子的动量为*p*1 、*p*2 、*p*3 和*p*4 ，四个粒子的质量为*m*1 、*m*2 、*m*3和*m*4 ，根据动量守恒和能量守恒，有

*p*＝*p*1＋*p*2＋*p*3＋*p*4 （2）

*mc*2＋*m*0*c*2＝*m*1*c*2＋*m*2*c*2＋*m*3*c*2＋*m*4*c*2 （3）

由上面论述可知

*p*1＝*p*2＝*p*3＝*p*4＝ （4）

再由（1）式可知，碰后四个粒子的能量从而质量必相等。以*m*′ 表示碰后四个粒子中每个粒子的质量，由（3）式得

*mc*2＋*m*0*c*2＝4*m*′*c*2  （5）

对碰前那个运动的质子，由相对论能量和动量关系有

 （ *mc*2）2＝*c*2*p*2＋*m*02*c*4  （6）

对四个粒子中任一个粒子，由相对论能量和动量关系有

（*m*′*c*2）2＝*c*2 （）2＋*m*02*c*4  （7）

由（5）、（6）、（7）式可得

*mc*2＝7*m*0*c*2  （8）

代入数据得

*mc*2＝1.05×10-9J （9）