# 第十五届全国中学生物理竞赛

# 决 赛 试 题

## 一、（15分）

用两个“爬犁”（雪撬）在水平雪地上运送一根质量为*m*、长为*l*的均匀横梁，横梁保持水平，简化示意图如图所示，每个爬犁的上端A与被运送的横梁端头固连，下端B与雪地接触，假设接触面积很小，一水平牵引力*F*作用于前爬犁，作用点到雪地的距离用*h*表示，已知前爬犁与雪地间的动摩擦系数为*k*1，后爬犁与雪地间的动摩擦系数为*k*2，问要在前后两爬犁都与雪地接触的条件下，使横梁沿雪地匀速向前移动，*h*应满足什么条件？水平牵引力*F*应多大？设爬犁的质量可忽略不计。

*k*2

*k*1

*h*

*F*

*A*

*B*

*A*

*B*

*m*

*l*

## 二、（20分）



*T*1

3

1

*O*

*V*

2

图决15-2

*T*

1摩尔的理想气体经历了一个在*T*-*V*图上标为1—2—3—1的循环过程，如图所示，其中，过程1—2的方程式为*T*＝2*T*1（1－*βV*）*βV*，过程2—3为经过原直线上的一段，过程3—1的方程式为*T*＝*T*1*β*2*V*2，式中*β*是常量，状态1和2的热力学温度已知为*T*1和*T*1，求该气体在此循环过程中对外所做的功。

## 三、（20分）

焦距*f*的数值均相同的三个薄透镜L1、L2与L3，依次为凸透镜、凹透镜与凸透镜，它们构成一个共轴光学系统，相邻透镜间的距离均为*d*，各透镜的光心分别为O1、O2、O3，如图所示，在透镜L1左方，位于主光轴上的物点P，经过此光学系统最终成像于透镜L3右方的*Q*点，若距离PO2＝O2Q，则物点P与透镜L1的距离应为多少？

*O*3

*O*2

*O*1

*Q*

*P*

L3

L2

L1

*d*

*d*

## 四、（25分）

一条在湖面上以恒定速度行驶的船上，有一与船固边的竖直光滑墙壁，有一个小球沿水平方向射到墙上，相对于岸，小球速度的大小为*v*1，方向与墙的法线成60°角，小球自墙反弹时的速度方向正好与小球入射到墙上时的速度方向垂直。问船的速度应满足什么条件？设小球与墙的碰撞是完全弹性的。

## 五、（30分）

如图所示，在半径为*R*的圆形平面内，分布有匀强磁场，磁场方向与圆面垂直且指向纸面外，圆面的周界是一刚性的固定的圆环，SD是圆环的一条直径。一束质量和电量都相等的带正电的粒子以不同的速度沿垂直于磁场的方向从S点射入磁场，速度方向与SD的夹角不超过30°，已知这种粒子在该磁场中做圆周运动时的周期为*T*，在D点，圆环上有一小孔，只要粒子到达D点，该粒子便从小孔穿出磁场区域。设粒子与圆环的碰撞都是完全弹性的，每次碰撞后，粒子的电量不变，不考虑粒子间的相互作用与相互碰撞以及重力的影响。求满足以下条件的那些粒子在射入磁场时的速度的大小和方向：在磁场内运动的总时间为*T*且与圆环的碰撞不超过6次，其中最后一次“碰撞”是指正好到达D点。

*D*

*O*

30˚

30˚

*S*

## 六、（30分）

两条质量均为*m*的相同的均匀细杆AB、BC在B端相连，杆AB的上端A与天花板上的固定点相连，杆BC的下端C与水平地面接触，A点和B点的连接都是光滑的，地面是粗糙的，A点到地面的距离为杆长的倍，整个系统可在竖直平面内自由运动，*θ*1和*θ*2分别为两杆与竖直线的夹角，如图所示。

*θ*2

*θ*1

*B*

*C*

1．试讨论在什么条件下，无论杆与地面间的动摩擦系数多么大，这两杆组成的系统都不可能达到平衡，要求用计算器通过数值计算法找出处于这种情况时*θ*1的取值范围。

2．讨论该系统处在各种平衡位置的摩擦力*f*的大小（用*θ*1和*θ*2表示）和方向。

# 第十五届决赛试题参考解答

## 一、

整个装置的受力情况如图15-36所示，其中N1与N2分别为雪地对爬犁的支持力，和分别为摩擦力，根据平衡条件有

 （1）

 （2）

 （3）

根据摩擦力与正压力的关系

有

 （4）

 （5）

解以上各式得 图15-36

 （6）

*F*＝*mg* （7）

根据题意，F与N2必须满足下面条件

F>0

（8）



由F>0可知，（7）式的分母，由可知（6）式的分子



由此可得h满足的条件为

*h*≤ （9）

在满足（9）式的条件下，所求的*F*即（7）式。

## 二、

1.利用状态方程将此循环过程用p、V参量来表述，并画出其p-V图线。以p、V为参量表述的过程1-2的方程为

 （1）

此过程在p-V图上为一直线段，过程2-3中T与V成正比，为一等压过程，在p-V图上为一条平行于横轴（V）过状态2的直线段，其过程方程为

 （2）

p2为状态2的压强。

过程3-1的方程为

 （3）

此过程在p-V图上为一条其延长线过原点的直线段。

2.确定状态1、2、3在p-V图上对应点的坐标。用（），（），（）分别表示状态1、2、3的参量，由题中所给1-2过程方程可以求得状态1、2的体积分别为：

 （4）



利用状态方程可得：



 （5）

由（2）、（3）、（5）式可求出状态3的体积V3为

 （6）

3.综合以上所得结果，可画出该循环

过程的p-V图线，它是等腰三角形（如图

15-37所示）。

由循环过程的方向可知，气体在循环

过程中对外做正功。其值A等于此三角形的面积。即

 （7）

将（4）、（5）、（6）式代入，得

 （8）

## 三、

1.该系统对凹透镜L2而言是一左右对称的光学系统，依题意，物点P与像点Q处于对称的位置上，即对凹透镜L2而言，物点及经它成像后的像点应分居O2的两侧，且物距u2与像距v2相等，即

 （1）

代入凹透镜L2的物像公式

 （2）

解得

 （3）

物距与像距均为负值表明：物点P经透镜L1成像后，作为凹透镜L2的物点P2位于它的右侧，因而是虚物，经凹透镜L2成像于它的左侧，为一虚像，虚像点P2与虚像点Q2对凹透镜L2位于对称位置（图15-38）。

考虑（3）式，参照图15-38，对透镜L1而言，其像距v1可表示为

 （4）

代入凸透镜L1的物像公式

 （5）

解出

 （6）

2.由（2）式，凹透镜L2的像距可表示为



当物点P2由右向左逐渐逐趋近于O2时，即物距u2由负值逐渐增大而趋于零时，像距v2亦由负值逐渐增大趋于零，即像点Q2由左向右亦趋近于O2，即→0时，→0，当=0时，=0，即对凸透镜L1而言，像距，参见图15-39。代入（5）式



解得

 （7）

此结果表明，当物点P经透镜L1后恰成像于透镜L2的光心O2上，由系统的对称性，可知经透镜L3后，将成像于对称点Q，像距v3数值为



由此可知（6）式与（7）式均为所求的解，但对（7）式的结果，透镜间距d必须满足条件

 （8）

这也可以从另一角度来考虑。当P通过L1成的像正好在L2的光心O2处时，它经过L2成的像仍在原处，即。这样也可得到上面的结果。

分析与评述 此题按陆续成像考虑，一个一个透镜做下去也能得出（6）式的解，但列式子时容易出错，不如考虑对称性的解法，有清晰的物理图像，求解主动。

此题的（7）式的解也以用“P经L1成像O2”的思路解出最为简明，但能这样想必须以“透镜成像时，若物距为零则像距也为零”作为已知结论才行。

## 四、

在碰撞的瞬间，过小球与墙壁的碰撞点O作一相对地面静止的直角坐标系Oxy，Ox轴沿水平方向，Oy轴与墙的法线重合，如图15-40所示，图中、分别为小球与墙壁碰撞前后的速度，它们的分量分别为



(1)





(2)



设船的速度为u，其分量分别为ux和 图15-40

uy，相对于船，墙是静止的，小球则在速度射向墙，以速度反弹，和分别为



(3)



其分量分别为

(4)





(5)





因为墙壁是光滑的，小球与墙的碰撞是完全弹性的，故有

 （6）

 （7）

解（4）、（5）、（6）和（7）式，得

 （8）

 （9）

把（1）、（2）式代入（3）、（4）式，得

 （10）

任意值 （11）

即船的行驶速度必须沿y方向的分速度，亦即具有沿墙壁平面法线方向的分速度，其大小为；而沿x方向的分速度不受限制，可取包括零在内的任意值。

## 五、

设粒子的质量为m，电量为q，磁场的磁感应强度为B。速度大小为v的粒子进入磁场后，因受洛伦兹力作用而做圆周运动，轨道的半径r为  （1）

圆周运动的周期T为  （2）

不同速度的粒子，其圆周运动的轨道半径不同，但周期是相等的。先考察速度方向在SD下侧的粒子，其速度方向与SD的夹角为i，速度大小为v，从S点进入磁场后，因受磁场区域的限制，它在磁场中的轨迹仅是圆周的一段圆弧，在与圆环碰撞后，速度方向改变，沿同样长的一段圆弧运动后，再与圆环碰撞。设每一段圆弧与圆环的两交点与圆环中心的连线间的夹角为，该圆弧对其圆心所张的圆心角，如图15-41所示，由几何关系可知

 （3）

即和的大小与粒子射入磁场时速度的方向有关。若粒子从射入磁场至最后达到圆环上的D点的过程中，与圆环碰撞n次（包括达到D点那一次），则它在磁场中运动的轨迹为n段圆弧，每段弧的两端与圆环中心O的连线的夹角的总和为，按题意有

 

k=0表示粒子绕圆环中心半周便“碰撞”D点，k=1表示粒子绕圆环中心一周半后“碰撞”D点。由此式得

 （4）

因为粒子在磁场中运动的时间为T，故n段圆弧对其圆心所张的圆心角的总和为



即  （5）

把（4）、（5）两式代入（3）式，得

 （6）

因i在00到300之间，故有



即有  （7）

式中n是1至6的整数，k为大于等于零的整数，满足（7）式的k值和n值以及对应的、和i的值为

    

    

(8)

    

    

上面的经四种情况k=1、n=6，粒子运动轨道的弧的两端与圆环中心的连线间的夹角，该粒子从S进入磁场，第一次与圆弧的碰撞点正好在半圆环的中点，第二次碰撞点正好在D点，它在磁场中运动的时间尚未达到T便离开磁场，故这种粒子不符合本题要求。

再考虑速度方向在SD上侧的粒子，其速度的大小为v，方向与SD的夹角为，从进入磁场到第一次与圆环碰撞的运动轨迹如图15-42所示，由几何关系可得

 （9）

仍由（4）式给出，仍由（5）式给出。把（4）

式和（5）式代入（9）式得

 （10）

因在0到之间，故有 图15-42



即有  （11）

满足上式的k值、n值以及对应的、和的值为

k=0 n=3   =0

k=1 n=4   

(12)

k=1 n=5   

k=2 n=6   

粒子做圆周运动的轨道半径r与粒子的速度v有关，而r与圆环半径R以及和的关系可由正弦定理给出，即

 （13）

由（1）式和（13）式以及（2）式得

 （14）

v的大小仅取决于和的值，与无关。结合（8）式与（12）式所得的结果，符合题意的和的值有5组，即符合本题要求的粒子速度的大小有5种，这5组、和的值分别为

   （n=3）

   （n=4）

   （n=5）

(15)

   （n=4）

   （n=6）

由（14）式，可求得各速度的大小

 （）

 （）

 （）

 （）

 （）

为负值表示速度的方向在SD的上侧。

分析与评述 由于在均匀磁场中，运动的带电粒子所作圆运动的周期均相等，又由于粒子与环壁作完全弹性碰撞，只改变粒子速度的方向不改变粒子速度的数值，因而粒子在磁场中的运动轨迹是相等圆心角的圆弧，若将其全过程的运动轨迹画出，是一幅美丽的对称图形。解此题时，按题意选出一个、或几个粒子并不困难，关键是能有序地、不多亦不少地选出所有粒子。例如既要求出从SD下侧射出、小于300的带电粒子，又不要漏掉从SD上侧射出、小于30°的带电粒子。还要注意剔除那些未到达一个周期时间就早早从小孔D逸出的那些粒子。解答中提供用列表方法选出符合要求的所有粒子。同学在思考问题时，减少盲目性，培养严谨、有条理的思维、分析归纳的习惯是很重要的。

## 六、

1.平衡方程

设杆长为，取、在垂直线的左侧为正，根据对称性，只需讨论的情形，根据已知条件有



即

 （1）

由此式知、的范围是





两杆构成的系统在C端着地的条件下，时，可有三种可能的位形，如图15-43所示。图中位形a为的情况，位形b为的情况，位形c为的情况。三种位形两杆受力的情况如图中右图所示。N和f是为使系统处于这种位形的平衡状态，外界所需加给C端的竖直力和水平力，各力以图示的方向为正。

根据两杆的平衡条件，对于三种位形，均可列出下列平衡方程：

 （2）

 （3）



即

 （4）

和



即

 （5）

解（2）、（3）、（4）、（5）式，得

 （6）

 （7）

2.不论摩擦系数多么大，系统都不可能平衡的条件

（6）式给出的N和（7）式给出的f是系统处于平衡状态时所需外界作用于C端的竖直力和水平力。在本题所给的条件下，外界作用于C端的力来自地面。

当N>0时，竖直力N即可由地面的支持力提供，而地面有向上的支持力作用于C端时，由于摩擦系数可以足够大，任何大小和方向的f均可由摩擦力提供，从而系统可以保持平衡。如果N<0，这表明为使系统平衡，C端所需的外力必须是向下的拉力，而地面是无法提供拉力的，这时摩擦力已不能产生，从而无论动摩擦系数有多么大，系统都不能平衡。当N=0时，摩擦力也无从产生，无法满足（7）式所需的f值，系统也不能平衡。总之，无论摩擦系数多么大，系统都不能平衡的条件是

 （8）

由（6）式知此条件为

 （9）

下面将此式改写一下，此式可写为



即



因为，所以上式成为

 （10）

下面分几种情况讨论。

1）对于位形a，即，的情况（此处及下面凡是的情形都在最后讨论）。这时条件（10）式的分母，分子，整个分子式，即（10）式左方大于零，（10）式不能满足，即没有平衡不能成立的情况。

2）位于位形b，即的情况，这时（10）式分母，（10）式成为

 （11）

这时虽然，但当足够大时，仍可成立。设满足的角度为和[它们还须满足（1）式]，则当时条件（10）式成立。由于位形b中的最大值为，所以当

 （12）

时（10）式成立，不论摩擦系数多么大，系统都不能平衡。

3）位于位形c，即，的情况。这时（10）式的分子和分母均为负值，（10）式不能成立，也没有平衡不能成立的情况。

总之，无论摩擦系数多么大，系统都不能平衡的情况发生在位形b，发生这种情况时取值范围为（12）式，即

 （14）

3.的计算

满足下列二式：

=0

 （15）

这个联立方程是有解的，但属于超越方程，无法求得解析解。只能用计算器通过数值计算，用探索逼近的方法求解。

当时，，这时而有。上式第一式不能满足，当由0逐渐增大时，也逐渐增大，而及逐渐减小。由于两者的变化都是单调的，故总会有一个角度，使（15）式得到满足。

为求的值，可先设定一个值，求出，通过比较与近似相等为止。这时的的值就是，这种计算用计算器很容易完成。一个具体的实例见下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 结果 |
|  |  | 2.1060  1.8550  1.5264 | 0.5290  1.0919  1.7321 | >  >  < |  |
|  |  | 1.6956  1.6287  1.5948 | 1.3989  1.5286  1.5951 | >  >  < |  |
|  |  | 1.5979  1.5950  1.59486 | 1.5884  1.5945  1.59479 | >  >  > |  |

由表可知，取4位有效数字时，的值为

 （16）

4.平衡时摩擦力的大小和方向

下面分别讨论三种位形以及几个特殊情况下摩擦力f的大小和方向。

在所有的情况下，平衡时摩擦力均由（7）式给出，即

 （17）

其方向由上式的符号决定，时方向向左，时方向向右。

1）位形a



当取最大值65.530时，，如图15-44所示，这时



当C端向左移时，减小，增大，如图15-45所示。这时f的方向向右（），大小逐渐增大。

当减小趋于450时，增大趋于450，这时由（17）式知，其右边分母由负值趋于零，从而f值趋于，即f的方向仍向右，大小趋于无穷大。因此时N趋于[见（6）式]，这样的f仍可由地面提供，平衡态可以实现。

当与严格地等于450时，二杆成一直线，两端受数值为的推力的作用。这时若无重力存在，二杆仍可平衡。这是一种不稳定平衡，只要受一点扰动，平衡即被破坏。在此，重力正是这种扰动，因此两杆成严格直线的平衡态是不可能的。平衡破坏时减小，增大，系统进入位形b的无论摩擦系数多么大都不可能平衡的区域内。

2）位形b

在位形b中分两个区域，当时是无论摩擦系数多么大也不能平衡的区域，那时所需的竖直力N<0；当=时，N=0，f=+0.7976mg=f0，仍无从获得，因而严格等于时是不能平衡的。

当由逐渐减小时，N由零向正方向增大，f则由f0逐渐减小但仍为正值，即f的方向向左，如图15-46所示。

当=0时，，这时，但f=0，情况如图15-47所示。

顺便再提一下，时是无论如何不能平衡的情况。在这种情况下，无法从地面取得所需的竖直力和水平力。如果一定要使保持这样的角度而又使C端在地平线上，就必须另外加一个向下的竖直力（N<0）和一个向左的水平力（f>0），如图15-48所示（在=的情况下只需加一个f>0的水平力）。C点越向左移（即越大），这两个力的数值也越大，直到极限情况，增大到450，减小到450，两杆成一直线。这时两杆的A端和C端受一个无穷大的拉力，这是一个稳定的平衡，与位形a中两杆成一直线的极限情况不同。

3）位形c

这是的情况。我们从最大，=0的情况，如图15-44开始讨论，这时f=0，当C点逐渐右移时，<0，其绝对值逐渐增大而则逐渐减小。这时。当C点逐渐右移时，N由1.5mg逐渐减小，f则由零先逐渐增大，达到一最大值（在，处）后再逐渐减小为零（当=0时），如图15-49和图15-50所示。

分析与评述 本题的分析在解答中已经写得很清楚了。做这一类题的关键是思考周密，分析时不要漏掉可能的情况，而且要安排一个合理的分析次序。

另外，用计算器利用数值解法去解一个方程，是首次在竞赛中出现的一个要求，计算器是一个强大的武器，它可以很方便地得出很多看似很复杂的方程的数值解，而且要精确到几位数字都可以做到，这一点要很好地掌握起来。